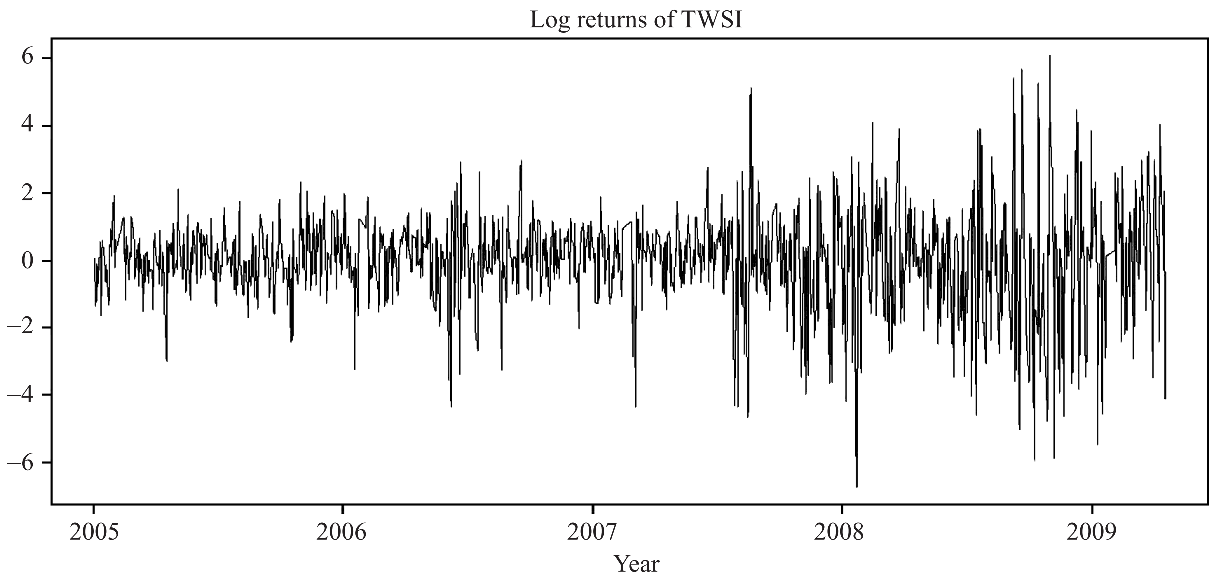
[研究成果報導]

貝氏計量經濟學：跨領域的學術研究

逢甲大學統計系　陳婉淑

一、前言

近年來由於科技的進步，伴隨著數位化及資訊化的環境，促使大量且完整的財經資料庫被建立，也讓許多學者陸續在財經時間數列資料中發現了許多有趣卻又難解的現象。財務時間數列（financial time series，如圖一台灣加權指數日報酬率）的特徵有平均水準無法預測、波動程度呈現非常數(non- constant)，但其變化卻具有相當的規則，例如波動的叢聚性或高狹峰分配。由於財金資料的波動程度相對於風險的程度，而風險又是決定金融資產價格的最重要因素，因此，尋求一個能夠描述波動程度規律性的計量模型是一個重要學術研究議題。2003 年諾貝爾經濟學獎頒發給 Robert F. Engle 與 Clive W. J. Granger 兩位時間數列理論的大師，這象徵著計量經濟學(econometrics)時代的正式到來。計量經濟學是統計學、經濟理論和數學的彙總，經濟學研究必須運用計量經濟學來達到統計上的正確性和合理性。Engle [1]提出的條件自我迴歸變異數異質性(ARCH)模型與 Bollerslev [2]推廣的自我迴歸條件變異數異質性(GARCH)模型已廣泛的被學術界和金融業界拿來分析市場風險。在一般學術研究中，很少有像 ARCH（及 GARCH）模型一樣，還處於在發展階段的學術研究議題，卻能同時對億萬人的經濟生活產生重大的影響。然而，這些早期的模型只允許以對稱性來反應過去的波動。在最近二十多年裡，GARCH 模型已經被擴大、修改並改善以描述財務時間數列的特性，Poon and Granger [3]描述了一系列財務時間序列的特性，其中包含持續性的動態波動、厚尾分配、均數平穩的報酬及不對稱的波動性，來反應過去正負報酬的影響。為捕捉財務時間數列之非線性動態系統，Tong [4]提出門檻自我相關模型。這個觀念被大量運用在變異數異質性模型；譬如 GJR-ARCH，T-GARCH 模型等。大量的不對稱、非線性模型相繼被提出。筆者和香港科技大學蘇家培教授、美國 Drexel 大學姜寄南教授



圖一　台灣股市加權指數日報酬率

共同提出一個平均水準和波動程度都不對稱的雙門檻模型 DTX- GARCH [5]。在國際化之投資環境，投資者可藉著由國際股市動態關連作爲投資決策的參考，包括外生均數項及外生門檻變數，用美國股票市場訊息對其他市場報酬率的影響，描述平均水準和波動的不對稱性。Chen and So [6]提出一個廣義的門檻變異數異質性模型，充份描述財務時間數列之厚尾、不對稱、波動群集等特徵。本論文之門檻變數容許一些外在的重要變數或指標以及該數列過去訊息爲門檻變數。這些門檻變數之重要性可由估計的權數得之。

二、貝氏計量經濟學 (Bayesian Econometrics)

爲了描述複雜的財務時間數列其益趨複雜的模型，傳統的估計方法已經不再勝任，應用貝氏方法已經是不可擋的趨勢。由於馬可夫鏈蒙地卡羅(MCMC)方法使得貝氏後驗分配的計算得到改進；目前 MCMC 方法爲代表的現代貝氏統計學已廣泛應用於眾多的學門，並獲得很多顯著的成果。拜賜於廉價且高速電腦的出現和隨機積分方法的發展，愈來愈多研究者採用貝氏方法分析複雜的變異數異質性模型，尤其是 MCMC 的方法廣受採用，而產生此趨勢。MCMC 發展於 1980 年代後期是一種運用大量的模擬方法去解決數值積分問題，用以解決日益複雜，但符合實際的模型其衍生的估計問題。筆者在 1991-1992 年期間，以訪問博士生身分，有幸參與芝加哥大學的現代貝氏研究(Rusy S. Tsay and Robert McCulloch)與修習貝氏計量經濟學課程(Professor Arnold Zellner)，筆者自 1992 年後有一系列的貝氏計量經濟學研究成果；涵蓋提出新的模型、新的估計方法、模式診斷、模型選擇、波動預測及風險值估計等。

三、模型選擇

在 Geweke [7]、Bauwens and Lubrano [8]等文獻中，皆可得知貝氏方法已經成功應用於非線性 GARCH 模型中。在一群龐大的候選模型中決定最佳配適模型是必要的。一般財務界在實務分析配適非對稱模型通常是主觀的決定，因此模型選擇就成爲重要議題。在貝氏方法估計的框架中，如何決定最適合的模型呢？在貝氏架構下，最廣爲使用的方法爲應用貝氏因子(Bayes factor)來比較候選的模型，使用貝氏因子選模事實上仍是有困難的(Berg, *et al.* [9])，最主要原因是邊際分配不易求得。Spiegelhalter *et al.* [10]提出 Deviance Information Criterion (DIC) 貝氏模型比較準則，即是基於模型對資料的適合性和模型的相應複雜性之間權衡(trade-off)的原則。當複雜的階層的模型將被估計時，DIC 對模型比較特別有用。DIC 容易計算並且對大範圍的統計模型適用。除了比較準則的方法之外，近幾年來有許多貝氏模式選取的方法被提出，筆者和香港科技大學蘇家培教授、雪梨大學 Richard Gerlach 教授在共同探討變異數異質性模型選擇上有一系列合作成果；以下簡單介紹三種貝氏模型選擇的方法，並著重在近期與變異數異質性模式相關的例子，可以解決在財務實證分析上主觀認定模型的問題。

這包含 1.應用重要抽樣(importance sampling)方法估計後驗模型勝算比(posterior model odds ratio)，如參見 Geweke [7]，Chen and So [6]及 Gerlach *et al.* [11]；2.應用 Green [12]所提出可逆跳躍的 RJ-MCMC 法(reversible-jump)，如 So, Chen, and Chen [13]選擇線性或雙門檻 GARCH 模型，Chen, So, and Gerlach [14]提出如何選擇合適的不對稱性變異數異質性模型；3.應用近似後驗分配的機率估計(posterior model probability method)，如 Congdon [15, 16]，Chen, Gerlach, and So [17]。上述的方法皆涵蓋 MCMC 方法，估計邊際概似函數、貝氏因子及後驗分配的機率。

假設 $y^{1,n}=(y_1,\ldots,y_n)$，表示資料觀察值從時間 1 到 n。在貝氏架構下，選擇模型 M_i 和 M_j 可用後驗勝算比 POR (posterior odds ratio)來決定；也就是選擇模型 M_i，如果 $POR_{ij} > 1$

$$POR_{ij} = \frac{\Pr(M_i \mid \mathrm{y}^{1,n})}{\Pr(M_j \mid \mathrm{y}^{1,n})} = \frac{p(\mathrm{y}^{1,n} \mid M_i)}{p(\mathrm{y}^{1,n} \mid M_j)} \frac{\Pr(M_i)}{\Pr(M_j)},$$

$P_r(M_i)$是模型 M_i 的先驗機率且 $p(\mathbf{y}^{1,n} \mid M_i)$ 爲邊際概似函數，定義如下：

$$p(\mathrm{y}^{1,n} \mid M_j) = \int p(\mathrm{y}^{1,n} \mid \theta_j, M_j) p(\theta_j \mid M_j)\, d\theta_j,$$

其中 θ_j 爲 M_j 的參數向量，而 $p(\mathrm{y}^{1,n} \mid \theta_j, M_j)$，$p(\theta_j \mid M_j)$ 分別爲 M_j 的抽樣密度函數和先驗密度函數。

此方法可應用在巢狀或非巢狀模型選擇，其表現的結果極佳，相較於古典的模型選擇方法具有較大的優點。但是其中邊際概似函數的估算是具有挑戰性的，無論是貝氏或古典方法，參見 Kass and Raftery [18]回顧此議題，主要是因爲在估算邊際概似函數的過程中牽涉到多重積分。

1. 重要抽樣(Importance sampling)

爲了估計每個模型的邊際概似函數，應用 Geweke [7]和 Gerlach, Carter, and Kohn [19]所提出的 MCMC 方法，當 $k \ge t$ 時，計算下列估計式：

$$\hat{p}(y_t \mid y^{1,t-1}, M_j) = \frac{\sum_{i=1}^{N} p(y_t \mid y^{1,t-1}, \theta_k^{[i]}, M_j) / p(y^{t,k} \mid y^{1,t-1}, \theta_k^{[i]}, M_j)}{\sum_{i=1}^{N} 1 / p(y^{t,k} \mid y^{1,t-1}, \theta_k^{[i]}, M_j)},$$

此 $\theta_k^{[i]}$ 是從後驗分配 $p(\theta_j \mid y^{1,k}, M_j)$ 第 i 次 MCMC 疊代中所得。估計式隨著樣本數 k 持續性的增加(k = 100, 200, ..., n)，透過獨立進行 MCMC 抽樣方式估計 $\hat{p}(y_t \mid y^{1,t-1}, M_j)$，則可得邊際概似函數估計，如下：

$$\hat{p}(y^{1,n} \mid M_j) = \prod_{t=1}^{n} \hat{p}(y_t \mid y^{1,t-1}, M_j); \quad j = 1, \ldots, k$$

此法已成功的應用選擇數個變異數異質性模式如 Chen and So [6]；Gerlach *et al*. [11]；So *et al*. [20]等。

2. Reversible-Jump (RJ) 之 MCMC 方法

可逆跳躍 MCMC (RJ-MCMC)方法是由 Green [12]所提出的。So, Chen, and Chen [13]和 Chen, So, and Gerlach [14]應用此方法選擇不對稱變異數異質性模式。應用此 RJ-MCMC 方法，我們必須宣告先驗分配，一個跳躍規則及 proposal 分配(q)。此種方法的優點在於其容許在不同維度的模型中選擇最適合的模型。

考慮在具有參數 θ_i 模型 M_i 和具有參數 θ_j 模型 M_j 之間跳躍，一般而言，θ_i 和 θ_j 可容許有不同維度。從模型 M_i 跳躍至模型 M_j ，我們建置兩個變數 u_i 及 u_j 。在考慮模型 M_i 和模型 M_j 之間跳躍；可以選擇 $u_i = \theta_j$ 及 $u_j = \theta_i$ ，則顯示簡單轉換的 Jacobin 項 $\left|\partial(\theta_j, u_j) / \partial(\theta_i, u_i)\right| = 1$ ，因此 (θ_i, u_i) 和 (θ_j, u_j) 維度是相同的。可逆跳躍 MCMC 的程序如下：

步驟 1：從 $q_i(u_i)$ 分配中模擬一組 θ_j 。

步驟 2：從模型 M_i 跳躍至模型 M_j ，其接受機率是 min{1, P}，其中 P 爲

$$P = \frac{p(y^{1,n} \mid M_j, \theta_j) p(\theta_j \mid M_j) \Pr(M_j) J(M_i, M_j) q_j(u_j \mid \theta_j)}{p(y^{1,n} \mid M_i, \theta_i) p(\theta_i \mid M_i) \Pr(M_i) J(M_j, M_i) q_i(u_i \mid \theta_i)} \left| \frac{\partial(\theta_j, u_j)}{\partial(\theta_i, u_i)} \right|$$

若此跳躍不被接受，就維持 M_i ，並更新參數 θ_i 。

$p(y^{1,n} \mid M_j, \theta_j)$ 爲模型 M_j 的概似函數，$p(\theta_j \mid M_j)$ 爲模型 M_j 先驗分配，$\Pr(M_j)$ 爲模型 M_j 被選擇到的先驗機率，$J(M_i, M_j)$ 是從模型 M_i 跳躍至模型 M_j 的機率。通常我們設定在模型 M_i 到模型 M_j 之間跳躍機率等於 1，也就是 $J(M_i, M_j) = 1$ 允許每次 MCMC 疊代都可跳躍。可設定先驗分配爲 $\Pr(M_i) = 0.5$ 表示對模型 M_i 和模型 M_j 無任何偏好，則 RJ 接受機率可簡化成

$$\min\left(1, \frac{p(y^{1,n} \mid M_j, \theta_j) p(\theta_j \mid M_j) q_j(u_j \mid \theta_j)}{p(y^{1,n} \mid M_i, \theta_i) p(\theta_i \mid M_i) q_i(u_i \mid \theta_i)}\right)$$

模型 M_j 的後驗機率的估計值，可以由選到 M_j 的比率獲得。詳細的步驟及 proposal 分配的選擇，可以參考 Chen, Gerlach, and So [17]當同時考慮選擇兩個以上的模型，應用此方法的複雜度與困難度就明顯地增加。

3. 模型的後驗機率(Direct posterior model probabilities)

本方法是 Congdon [15, 16]提出近似每個候選模型後驗機率的方法，當選擇的模型超過兩個以上，此方法並不會增加其模式選擇的複雜度。在相同的觀察值 $y^{1,n}$ 中，我們考慮 K 個競爭的模型，分別抽取個別模型的 MCMC 參數估計值 $\{\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_K^{(j)}), j = N_1 + 1, \ldots, N\}$ 。在執行 N 次疊代中丟棄前 N_1 次的疊代，可得到 $\Pr(M_i \mid y^{1,n})$ 的近似蒙地卡羅估計值如下：

$$\Pr(M_i \mid y^{1,n}) \approx \frac{1}{N - N_1} \sum_{j=N_1+1}^{N} \Pr(M_i \mid y^{1,n}, \theta_i^{(j)})$$
$$= \frac{1}{N - N_1} \sum_{j=N_1+1}^{N} \frac{p(y^{1,n} \mid \theta_i^{(j)}, M_i) p(\theta_i^{(j)} \mid M_i) \Pr(M_i)}{\sum_{l=1}^{K} p(y^{1,n} \mid \theta_l^{(j)}, M_l) p(\theta_l^{(j)} \mid M_l) \Pr(M_l)}$$

其中 $\theta_i^{(j)}$ 爲模型 M_i 後驗分佈之第 j 次 MCMC 疊代值；$\Pr(M_i)$ 是模型 M_i 先驗機率，$p(\theta_i \mid M_i)$ 是模型 M_i 之參數先驗分配，$p(y^{1,n} \mid \theta_i^{(j)}, M_i)$ 則爲

模型 M_i 的概似函數。可以設定 $\Pr(M_i) = 1/k$，表示對任何模型無偏好。

Congdon 提出的方法需要一些假設，由於篇幅限制，詳細在 Chen, Gerlach and So [17]有詳細討論。筆者的經驗是這個方法提供強而有力的計量模型選擇，Gerlach and Chen [21]和 Chen, Gerlach and Lin [22, 23]其模擬分析和實例都證實此方法，可以解決主觀配適模型的問題。

四、結論

在過去幾十年研究金融資料是極爲活躍的研究領域。現在有大量文獻（而且仍然在增長趨勢）陸續提出更多複雜的模型。由於篇幅限制，無法逐一探討相關文獻。衍生出來的問題有：如何檢定非線性效應；估計複雜的模型參數；多維度財務時間數列模型的建立及相關性之估計；不對稱共整合檢定的推廣和模型的建立；模型缺適性檢定；模型選擇；風險值預測；預測表現之評估等等問題。貝氏方法在計量經濟學和金融計量學等應用領域具有非常廣闊的前景。貝氏方法提供了估計、預測、選取模型的另一種可行性。模型亦趨複雜是未來的趨勢，這也提供給統計學家一個訊息，未來在貝氏計量經濟學的研究仍有很大的發展空間，去解決上述的重要議題。

參考文獻

[1] R. F. Engle, *Econometrica*, **5**, 987 (1982).

[2] T. Bollerslev, *Journal of Econometrics*, **31**, 307 (1986).

[3] S. H. Poon and C. W. J. Granger, *Journal of Economic Literature*, **41**, 478 (2003).

[4] H. Tong, *Pattern Recognition and Signal Processing*, E.N.S.T., Paris, France (1978).

[5] C. W. S. Chen, T. C. Chiang, and M. K. P. So, *The Journal of Economics and Business*, **55**, 487 (2003).

[6] C. W. S. Chen and M. K. P. So, *International Journal of Forecasting*, **22**, 73 (2006).

[7] J. Geweke, *Working Paper*, 532, Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis (1995).

[8] L. Bauwens and M. Lubrano, *Econometrics Journal*, **1**, 23 (1998).

[9] A. k. Berg, R. Meyer, and J. Yu, *Journal of Business and Economic Statistics*, **22**, 107 (2004).

[10] D. J. Spiegelhalter, N. G. Best, B. P. Carlin, and A. van der Linde, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **64**, 583 (2002).

[11] R. Gerlach, C. W. S. Chen, S. Y. Lin, and M. H. Huang, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **360**, 422 (2006).

[12] P. J. Green, *Biometrika*, **82**, 711 (1995).

[13] M. K. P. So, C. W. S. Chen, and M. T. Chen, *Journal of Forecasting*, **24**, 61 (2005).

[14] C. W. S. Chen, M. K. P. So, and R. H. Gerlach, *Australian New Zealand Journal of Statistics*, **47**, 473 (2005).

[15] P. Congdon, *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 346 (2006).

[16] P. Congdon, *Statistical Methodology*, **4**, 143 (2007).

[17] C. W. S. Chen, R. Gerlach, and M. K. P. So, *Advances in Econometrics*, **23**, 567 (2008).

[18] R. E. Kass, and A. E. Raftery, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 773 (1995).

[19] R. Gerlach, C. K. Carter, and R. Kohn, *Journal of Time Series Analvsis*, **20**, 309 (1999).

[20] M. K. P. So, C. W. S. Chen, T. C. Chiang, and D. S. Y. Lin, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **23**, 319 (2007).

[21] R. Gerlach and C. W. S. Chen, *Statistics and Computing*, **18**, 391 (2008).

[22] C. W. S. Chen, R. Gerlach, and A. M. H. Lin, *Quantitative Finance* (2009a).

[23] C. W. S. Chen, R. Gerlach, and A. M. H. Lin, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, DOI: 10.1002/asmb.765 (2009b).