

蘭迪斯猜想的研​​究近況

台灣大學應用數學科學研究所 王振男

藍迪斯猜想(Landis conjecture)是大約在 60 年代由蘇聯數學家藍迪斯(E.M. Landis)所提出的, 這個猜想是有關薛丁格方程非零解的遠處遞減行爲, 可以看成是一個遠處唯一延拓性的問題(unique continuation at infinity)。這個猜想敘述如下: 令 u 是方程 $\Delta u + q(x)u = 0$ 在 \mathbb{R}^n 空間的解, 假設 $|q(x)| \leq 1$, 存在一個正常數 C_0 使得 $|u(x)| \leq C_0$, 而且存在另一個正常數 C 使得 $u(x)$ 滿足 $|u(x)| \leq C \exp(-C|x|^{4/3})$, 則這個解 u 必須是零解, 也就是說 $u \equiv 0$, 這個猜想也說明了橢圓方程非零解遞減到零的速率是有限制的。這個猜想吸引人的地方在於只要是學過微積分的人都能了解這個問題, 但是解決這個問題卻是不容易的。然而在 1992 年這個猜想在複數函數的情況下是不對的, 這個結果是由一位俄國數學家馬許可夫(Meshkov)所證明, 他構造了一個滿足假設的複數函數的位能 $q(x)$ 及相對應的非零解 $u(x)$ 滿足 $|u(x)| \leq C \exp(-C|x|^{4/3})$, 同時也證明了如果解滿足 $|u(x)| \leq C \exp(-C|x|^{4/3+})$ 則解必須是零。這些是藍迪斯猜想的定性結果, 在 2005 數學家 Bourgain 跟 Kenig 導出馬許可夫結果的定量估計, 也就是給出了非零解在遠處最大的遞減速率。在這裡要強調的是這些結果是在解為複數函數值的情況下最佳的結果, 是不可能被改進的, 也就是說 $4/3$ 這個值是不可能被下修的。

前述的這些結果似乎說明了藍迪斯猜想要成立, 需要對解做其他的限制。所以數學家 Kenig 更精細的描述藍迪斯的猜想, 問藍迪斯猜想在實數函數解的情形下是不是對的, 當然這個時候位能函數 $q(x)$ 也是實函數值。要點出這個問題的困難度, 我們必須要說明在複數函數解情形下的證明手法。證明唯一延拓性(無論是定性或是定量)常依賴所謂的卡樂門型估計(Carleman estimate), 這個估計是一種加權能量的估計。雖然這個估計非常有用, 但是這個估計沒有辦法分出複函數或是實函數值, 因為估計本身都是取了解的絕對

值。所以要解決實函數解情形下的藍迪斯猜想, 光靠卡樂門型估計是不可行的。經過適當的變數變換(正確說法 rescaling), 藍迪斯猜想等價於估計薛丁格方程 $\Delta u + q(x)u = 0$ 解在任一點趨近於零的速率, 從強唯一延拓性的性質, 非零解於任一點趨近於零的速率不能快過任何多項式, 所以非零解於任一點趨近於零的速率是有限的, 所以我們希望去估計這個最大速率是多少, 結果顯示這個最大速率會與位能 q 的大小有關係, 假設位能的最大值被某個常數 M 控制, 也就是說 $\|q\|_{L^\infty} \leq M$, 則藍迪斯猜想是對的如果我們能證明當 r 夠小的時候 $\|u\|_{L^\infty(B_r)} \geq Cr^{\sqrt{M}}$, 常數 C 只依賴於一些先決的條件, 對於任一有界位能 q , 這個估計最大趨近於零的速率的問題也有待解決。我們要提醒的是這個速率 \sqrt{M} 是最佳的, 這從特徵函數趨於零的最快速率可以看出。最近藍迪斯猜想已有一些突破性的進展, 這個突破的關鍵在於二階橢圓方程解及準保角映射(quasiconformal mappings)之間密切的關係, 這個關係只有在二維才成立。基於這個想法, 我與芝加哥大學數學系的 Kenig 及 Silvestre 教授考慮在二維情形下, 假設位能 q 是非正的, 對於這個方程最大值法則(maximum principle)是成立的, 有了最大值法則我們就能利用障礙方法(barrier method)去構造薛丁格方程正數解, 並且控制這個解的行爲, 我們稱這個正解為正乘子(positive multiplier), 利用這個正乘子, 我們可以把原本的薛丁格方程轉換成散度型的二階橢圓方程, 這個散度型的方程就連結了準保角映射。準保角映射有跟解析函數類似的性質, 其中一個我們這邊用到的是所謂的三球不等式, 三球不等式可以看成是唯一延拓性的定量估計, 可以將解在小區域的訊息傳遞到大的區域。利用這個三球不等式我們可以驗證在二維且非正位能的條件下, 非零解在任一點趨近於零的最大速率及藍迪斯的猜想。就在最近, 一群數學家包含 Logunov、Malinnikova、Nadirashvili、

Nazarov、Sodin 宣告解決了二維的藍迪斯猜想（去掉我們原本對位能符號的假設），這是令人振奮的消息，使這個問題更廣為人知。當然這只

是起步，蘭迪斯猜想或是薛丁格非零解趨近於零最大速率的估計在維度等於或大於三時仍是個等待挑戰的問題。