多重 zeta 值上的古庄猜想

清華大學數學系（所） 張介玉

本文將介紹零特徵上的古庄猜想(Furusho's Conejcture)以及最近在函數體上的進展。古典的多重 zeta 值（簡稱爲 MZV）定義如下：

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r) := \sum \frac{1}{n_1{}^{s_1}\ldots n_r{}^{s_r}} \in \boldsymbol{R}。$$

這裡的$n_1,\ldots,n_r$是跑遍所有的正整數並且滿足$n_1 > \cdots > n_r$; 而$s_1,\ldots,s_r$是正整數且因收斂的關係我們要求$s_1 > 1$。我們稱 r 爲此 MZV 的深度，$s_1+\cdots+s_r$則是它的權重。當 r = 1 時，這就是大家熟悉的特殊 Riemann zeta 值；尤拉將 Riemann 特殊 zeta 值推廣爲重雙 zeta 值，即深度爲 2 的 MZV，任意深度的 MZV 則始於 1990 年代初期 Zagier 和 Hoffman 的研究。由於 MZV 出現在不同研究主題之間的聯繫，MZV 的研究已成爲這二十年的熱門研究題材。例如，它們與算術幾何中的混合 Tate 動機週期，模形式的周期多項式等有關聯。

在正特徵的世界，我們先固定有限體$\mathbf{F}_q$上的多項式環$A := \mathbf{F}_q[\theta]$，有了這樣的 A 我們即可定義正特徵的 MZV 如下：

$$\zeta_A(s_1,\ldots,s_r) := \sum \frac{1}{a_1{}^{s_1}\ldots a_r{}^{s_r}} \in \mathbf{F}_q((1/\theta))。$$

這裡的$a_1,\ldots,a_r$是跑遍所有的領導係數爲 1 的多項式，並且滿足

$$\deg\quad a_1 > \cdots > \deg\quad a_r。$$

而$s_1,\ldots,s_r$是任意正整數，這是因爲非阿基米德的性質，我們不需對s_1做要求此級數即可收斂。如同古典的術語，我們稱 r 爲此 MZV 的深度，$s_1+\cdots+s_r$則是它的權重。當 r = 1 時，此即爲 Carlitz zeta 值（深度爲 1 的 MZV）。2009 年，Anderson 和 Thakur 將這些 MZV 解釋爲某些混合 Carlitz-Tate t-動機的週期。因此，從算術幾何和超越理論的角度來理解這些 MZV 之間的線性關係（也是特徵零）是核心問題。

在古典的情況（即零特徵的世界），已知由 Ihara-Kaneko-Zagier 建立的正則化雙重洗牌關係可產生相同權重的 MZV 之間許多線性關係。2004 年，古庄(Furusho [2])引進了 p-進世界裡的 MZV，其推廣了 Kubota-Leopoldt 的 p-進 zeta 值。2007 年，古庄和 Jafari 證明了 p-進 MZV 也滿足正規化的雙重洗牌關係。古庄提出了一個猜想，斷言 p-進 MZV 滿足其對應的實值 MZV 所滿足的線性關係。至今，古庄猜想仍然是一個懸而未決的問題。

在正特徵的世界裡，由於分析理論的非阿基米德性質，對照於實 MZV 可表示成多重積分，古典的雙重洗牌關係在正特徵的世界裡目前還不知道是否存在。在[3]這篇文章，我與 Y. Mishiba 證明了古庄猜想在函數體上的類比。我們不是在雙重洗牌關係的方向上探討，而是採用下面描述的廣義對數觀點。

古典的對數和廣義對數之重要性可以追溯到希爾伯特的第七個問題，該問題由 Gelfond 和 Schneider 在 20 世紀 30 年代解決。在 20 世紀 60 年代，Baker 完全推廣了 Gelfond-Schneider 的結果，因此獲得菲爾茲獎。後來，Wüstholz 在[4]的文章中建立了所謂的解析子群定理，由此定理可以迅速推導出 Baker 定理。Wüstholz 的解析子群定理之精神是當我們考慮一個交換代數群 G 使得其定義方程式係數在數體上，那麼對於任何非零向量 Z∈LieG (**C**)使得透過 G 的指數函數，Z 映射到 G 的代數點，則 Z 坐標之間的所有線性關係（over 代數數）是由 G 的某個代數子群的定義方程（over 代數數）來解釋。1997 年，于靖教授[6]建立了所謂的 t 子模定理，其可謂 Wüstholz 解

析子群定理在函數體上的類比。在正特徵的世界裡，Anderson 引入的 t-模扮演著類似於古典超越數論裡交換代數群的角色。

在 1935 年，Carlitz 獲得了一個重要的等式，即 Carlitz zeta 在 1 的值恰巧等於 Carlitz 對數取值在 1，我們注意到這個等式在經典的對照是不存在的，因爲 Riemann zeta 函數在 1 沒有定義。Carlitz 公式揭示了正特徵 zeta 值與對數之間的密切關係。1990 年，Anderson 和 Thakur [1]對所有 Carlitz zeta 值給了一個漂亮且完整的推廣與詮釋。準確地說，對於任何正整數 s，他們在李代數上構造一個向量$Z_s \in \mathrm{Lie}\, C^{\otimes s}$，使得 Carlitz zeta 值$\zeta_A(s)$乘上某個具體的倍數後會出現在$Z_s$的最後一個坐標，並且此向量$Z_s$被$C^{\otimes s}$的指數函數映射到$C^{\otimes s}$的有理點，這裡的$C^{\otimes s}$是 Carlitz 模 C 的第 s 張量冪。這個重要的解釋與于靖教授的超越理論[5]讓于教授能夠證明 Carlitz zeta 值的超越性，其對照的古典狀況還是個猜想，數學家僅知道 Riemman zeta 函數取值在正偶數的超越性。

我最近與 Mishiba 合作[3]的出發點是將 Anderson-Thakur 的結果推廣到任意深度的 MZV。實際上，對於任何 MZV，我們明確地構造了一個 t 模 G 和他的李代數上一個向量 Z∈LieG，使得此給定的 MZV 乘上某個具體倍數後會出現在 Z 的某個座標，並且 Z 經過 G 的指數函數會映射到 G 的有理點。除此之外，我們還爲 v-進 MZV 建立了這樣一種結構解釋，這裡的 v-進 MZV 是 Goss 的 v-進 zeta 值的高深度推廣，並且是古庄的 p-進 MZV 在函數體上的類比，這裡的 v 是 A 的不可約多項式。在此說明，在古典的情況，我們並不清楚是否可以將 MZV 與 Wüstholz 解析子群定理中的廣義對數做連結。通過對 MZV 以及于靖教授的 t 子模定理合併做這些解釋，我們能夠證明 v-進 MZV 滿足相應的 Thakur MZV 滿足的相同線性關係，這也是古庄猜想在函數體上的精確類比。最後，我們注意到在古典的數體和正特徵的函數體存在許多平行理論和深刻現象。但是，方法和結果證明可能非常不同。上述研究和我們建立這些結果的方法就是個例子。我們自然地預期，上述提及的廣義對數觀點在未來的相關研究中會繼續扮演重要的角色。

參考文獻

[1] G. W. Anderson and D. S. Thakur, Tensor powers of the Carlitz module and zeta values, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 159-191.

[2] H. Furusho, p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Invent. Math. **155** (2004), no. 2, 253-286.

[3] C.-Y. Chang and Y. Mishiba, On a conjecture of Furusho over function fields, preprint.

[4] G. Wüstholz, *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen* (German) [Algebraic points on analytic subgroups of algebraic groups], Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 3, 501-517.

[5] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic* p, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 1-23.

[6] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 2, 215-233.