頂點算子代數及怪物單群的研究

中央研究院數學所　林正洪

有限群的研究源自於伽羅華(Galois)對多項式解的理論。二十世紀中期，在 Frobenius、Brauer、Thompson、Gorenstein 等多位大師的帶動下，有很蓬勃的發展,其中有限單群的分類更是二十世紀其中一個重要的數學成就。有限單群的分類定理申明，一個有限單群 G 必定同構於以下一種群：(1)一個位數爲質數的循環群，Z_p；(2)指數爲 n 的交替群 A_n；(3)一個李氏單群；(4) 26 個零星類單群(sporadic simple groups)之一。跟李氏單群不一樣，零星類單群不屬於任何一個無限序列,也缺乏一個自然的幾何模型及一套完整的理論。因此，每一個零星類單群都有其獨特性及神祕性。

在 26 個零星類單群中，最大的一個群稱爲怪物(Monster)。怪物單群是一個非常大的群,它的位數是

$$2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71;$$

大小約爲 8×10^{53}。這不但是可怕的大，怪物單群還有很多神秘的性質，到目前爲止仍沒法得到充份了解。

怪物群最初是由費雪(Fischer)及格拉斯(Griess)所發現，接著格拉斯、湯普森(Thompson)、康威(Conway)和諾頓(Norton)等証明怪物群的最小不可約表現的維數必須大於 196883。麥凱(McKay)發現這個數字加一，即 1 + 196883 = 196884，剛好等於古典隨圓 j-函數 $j(q)$ q-項級數的系數。他和湯普森後來猜想將存在有一個無限維怪物群的 Z-分級的模 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$，它的 Z-分級維數(graded dimension)

$$chV=\oplus_{n=0}^{\infty}dimV_nq^{n-1}=J(q)=j(q)-744.$$

這個猜想的模一般稱爲 Moonshine 模。與此同時，諾頓利用指數理論(character theory)發現怪物群那個維數 196833 的不可約表現上有一個相對於怪物群不變的交換但非結合的代數結構，也存在一個正定的不變對稱雙線性式。這個交換代數最後由格拉斯在 1982 年[7]構造完成，並証明了怪物群的存在性。得到格拉斯工作的啓發，Frenkel-Lepowsky-Meurman (FLM) [4]等人在 1982 年利用物理學上對偶共振模型(dual resonance model)中的頂點算子，成功構造出 McKay-Thomspson 的 Moonshine 模，接下來他們和 R. Borcherds 引入頂點算子代數(vertex operator algebra, VOA)的概念，並証明 Moonshine 模本身是一個頂點算子代數，而且怪物群是 Moonshine 頂點算子代數的自同構群[5]。

FLM 的工作不但証明了麥凱-湯普森猜想，也給了怪物單群一個自然的模型。因此、如何利用 Moonshine 頂點算子代數來研究怪物單群的特性則成爲了解零星類單群的一個重要課題。在[3]中，Dong 等人發現 Moonshine 頂點算子代數有一個子代數與 48 個中心電荷爲 ½ 的 Virasoro 頂點算子代數的張量積(tensor product)同構，這個子代數一般稱爲框架，框架觀念的引入對 Moonshine 頂點算子代數的研究非常重要，實際上很多有關 Moonshine 頂點算子代數的定理都是利用框架的性質得到証明。宮本雅彥[14, 15]更証明 Moonshine 頂點算子代數內中心電荷爲 ½ 的 Virasoro 子代數和怪物群 2A 共軛類的對合元素(involution)有一個一對一的對應。

個人的研究主要是圍繞 Moonshine 頂點算子代數相關的代數結構及它與怪物群和其他零星類單群的相互關系，特別就宮本雅彥對中心電荷爲½的 Virasoro 頂點算子代數和怪物群 2A 共軛類的理論有一些新的見解和結果。過去幾年有下列幾個較重要成果。

1. 框架頂點算子代數的結構理論

一個中心電荷爲 n 的單頂點算子代數被稱爲*框架頂點算子代數*（簡稱爲 framed vertex operator algebra, FVOA）如果它有一個同構於 $2n$ 個 Virasoro 頂點算子代數的張量積，其中最有名

的例子就是 Moonshine 頂點算子代數。框架頂點算子代數雖然有很好的性質，但它的結構很複雜。 在[12]中，我們證明每一個框架頂點算子代數是其相關的數碼頂點算子代數的一個簡單電流延伸(simple current extension)。這一結果使我們獲得框架頂點算子代數所有不可約模及其 Z_2－扭曲模的分類。此外，我們也獲得二個數碼 C 和 D 能成爲全純型框架頂點算子代數結構碼的充分必要條件，這開啓了對全純型框架頂點算子代數進行分類的可能性。利用框架頂點算子代數的理論，我們也證明了下列的定理[13]：

Theorem 1. 設 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ 爲一個框架頂點算子代數，如果 V 滿足以下 3 個條件：

(1) V 是全純的(即 V 是唯一的不可約 V-模)；

(2) V 的中心電荷爲 24；

(3) $V_1 = 0$。

則 V 必同構於 FLM 的 Moonshine VOA $V^\natural$ 。

這定理是有名的 FLM-猜想的一個特例。也是在沒有相關怪物群條件下，有關 Moonshine VOA 唯一性的唯一結果。

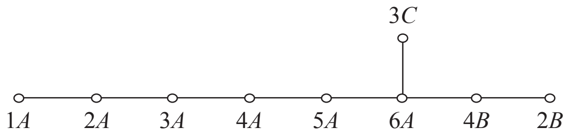
2. 利用頂點算子代數理論來解釋麥凱所發現一些怪物群和 E_8 - 圖間的神秘的關係

在怪物群發現的初期，就知道怪物群是一個 6－置換群，即隨意取兩個在 2A 共軛類的對合元素 a 和 b，它們的乘積 ab 的位數必少於 6，實際上 ab 必屬於下列 9 個怪物群的共軛類之一：1A、2A、3A、4A、5A、6A、4B、2B 或 3C。

約翰．麥凱(John McKay)發現這些共軛類跟仿射 E_8 圖有一個有趣的對應關係如圖一。

這個神祕關系被認爲是有關怪物群其中一個最大的謎[1, 6]，雖然經過三十年的光景，我們對它的了解仍沒有太大的突破。

在一系列的論文中[8, 10]，我們利用宮本雅彥對中心電荷爲 $\frac{1}{2}$ 的 Virasoro 頂點算子代數和 Moonshine 頂點算子代數理論，獲得了麥凱的 E_8 觀察一個自然的解釋。我們發現利用仿射 E_8－圖和 E_8－李群的對合元素，可在格子頂點算子代數 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 上定義出一些子代數，這些子代數可自然嵌入到 Moonshine VOA 上，主要結果是有關這些子代數和怪物群由兩個 2A 對合元所生成的雙面群(dihedral group)的對應。最近，我們更把相同的方法來推廣到其它的 VOA 上，並解釋



圖一

麥凱對 E_7 和 E_6－圖及怪嬰群(babymonster)和 Fischer 3-置換群 Fi_{24} 的一些觀測。

3. Leech 格子頂點算子代數 V_L^+ 內中心電荷為½的 Virasoro 頂點算子代數的分類

宮本雅彥的理論申明 Virasoro 頂點算子代數對 Moonshine VOA 研究的重要性，在[9]中，我們利用 Leech 格子自同構群 Co_0 的特性，把 V_L^+ 內所有中心電荷爲 $\frac{1}{2}$ 的 Virasoro 子代數做了分類，証明 V_L^+ 內只有兩種中心電荷爲 $\frac{1}{2}$ 的 Virasoro 子代數，它們分別對應於 L 內 $\sqrt{2}A_1$ 和 $\sqrt{2}E_8$ 的子格子。利用這結果，我們討論一個最初由 Glauberman-諾頓[6]所發現，相關怪物群和某些 Weyl 群的一些神秘的關係，並解釋了其中 1A 的情況。

參考文獻

[1] R.E. Borcherds, Problems in Moonshine, *First International Congress of Chinese mathematicians* (*Beijing*, 1998), 3-10, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001).

[2] C. Dong, R. Griess Jr. and G. Hoehn, *Commu. Math. Phys.*, **193**, 407 (1998).

[3] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, *Pro. Symp. Pure. Math.*, *American Math. Soc.*, **56** II, 295 (1994).

[4] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **81**, 3256 (1984).

[5] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, *Pure and Applied Math*., **134**, Academic Press (1988).

[6] G. Glauberman and S.P. Norton, *Proceedings on Moonshine and related topics (Montreal, QC, 1999)*, 37-42, *CRM Proc. Lecture Notes*, **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[7] Robert L. Griess, Jr., **69**, 1 (1982).

[8] C. H. Lam and M. Miyamoto, *Intern. Math. Res. Not.*, Art. ID 35967, 27 pp (2006).

[9] C. H. Lam and H. Shimakura, *International Mathematics Research Notice*, **2007** (2007). article ID rnm132, 21 pages, doi:10.1093/imrn/rnm132.

[10] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, *Trans. of AMS*, **359**, No. 9, 4107 (2007).

[11] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, *Intern. Math. Res. Paper*, **3**, 117 (2005).

[12] C. H. Lam and H. Yamauchi, *Comm. Math. Phys.*, **277**, 237 (2008).

[13] C. H. Lam and H. Yamauchi, *Intern. Math. Res. Not.*, **2007** (2007). article ID rnm003, 9pages, doi:10.1093/imrn/ rnm003.

[14] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra*, **179**, 523 (1996).

[15] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math*, **159**, 535 (2004).