

科西黎曼流形上的分析與幾何

中央研究院數學研究所 蕭欽玉

一、前言

科西黎曼流形是非常重要的流形，在幾何、分析、偏微分方程與數學物理如量子力學及弦論上都扮演著重要的角色。重要的例子有複流形的邊界或複流形上的解析線叢的單位叢。在這些例子中，一旦了解複流形的邊界或複流形上的解析線叢的單位叢的分析及幾何的性質，我們即可掌握複流形本身的性質。筆者的研究工作的一大重點為利用微局部分析(Microlocal Analysis)來處理科西黎曼流形上的幾何與分析問題。本文將引入科西黎曼流形及簡單的描述這一類流形的重要性並介紹科西黎曼流形上的一些重要進展以及筆者在這個領域的貢獻。

給定一個 $2n+1$ 維的平滑的流形 X ，令 CTX 為 X 的複化的切叢。如果我們能找到 CTX 的一個子叢 $T^{1,0}X$ 滿足底下的三個條件：

- (i) $\dim_{\mathbb{C}} T^{1,0}X = n$ ，
- (ii) $T^{1,0}X \cap T^{0,1}X = \{0\}$ ，其中 $T^{0,1}X = \overline{T^{1,0}X}$ ，
- (iii) $[C^\infty(X, T^{1,0}X), C^\infty(X, T^{1,0}X)] \subset C^\infty(X, T^{1,0}X)$ ，

則我們稱 $(X, T^{1,0}X)$ 為一個科西黎曼流形， $T^{1,0}X$ 為 X 上的一個科西黎曼結構。從現在開始，我們都假定 $(X, T^{1,0}X)$ 為一個 $2n+1$ 維的可定向的科西黎曼流形。我們在 CTX 上選定一個赫米訓度量(Hermitian metric)使得我們有如下的垂直分解：

$$CTX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X \oplus CT,$$

其中 T 為一個處處不為零，取值為實數且長度為 1 的向量場(non-vanishing real vector field of length one)。根據對偶性，這個在 CTX 上的赫米

訓度量引出複化的餘切叢 $\mathbb{C}T^*X$ 上的一個度量。我們也把這個度量記為 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。則我們有如下的垂直分解：

$$\mathbb{C}T^*X = T^{*1,0}X \oplus T^{*0,1}X \oplus \mathbb{C}\omega_0$$

其中 ω_0 為一個處處不為零，取值為實數的一階微分形式(non-vanishing global real one form)，且滿足 $\langle \omega_0, T \rangle = -1$ ， $T^{*0,1}X = (T^{1,0}X \oplus \mathbb{C}T)^\perp$ ， $T^{*1,0}X = (T^{0,1}X \oplus \mathbb{C}T)^\perp$ ；也就是說，對所有 X 上的點 x ，我們有

$$T_x^{*0,1}X = \{u \in \mathbb{C}T_x^*X; \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in T_x^{1,0}X \oplus \mathbb{C}T(x)\}$$

$$T_x^{*1,0}X = \{u \in \mathbb{C}T_x^*X; \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in T_x^{0,1}X \oplus \mathbb{C}T(x)\}$$

在這邊 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表著複化的餘切向量(complexified cotangent vector)和複化的切向量(complexified tangent vector)的對偶。我們把 $T^{*0,1}X$ 稱為 X 上的 $(0, 1)$ 形式的叢(bundle of $(0, 1)$ forms)， $T^{*0,q}X := \Lambda^q(T^{*0,1}X)$ 稱為 X 上的 $(0, q)$ 形式的叢(bundle of $(0, q)$ forms)。

有了 ω_0 ，我們可定義 X 上的類比形式(Levi forms)或類比曲率(Levi curvature)的概念：給定 X 上的一個點 p ，我們把底下的赫米訓二次型(Hermitian quadratic forms)

$$\mathcal{L}_p(U, \bar{V}) = -\frac{1}{2i} \langle d\omega_0(p), U \wedge \bar{V} \rangle, \quad U, V \in T_p^{1,0}X$$

稱為 X 上的類比形式。

介紹完科西黎曼幾何裡的基本定義後，我們先來看科西黎曼流形的一些特殊類：

(i) 當類比形式在 X 上的每一點都不退化，此時 $(X, T^{1,0}X)$ 為一個切觸流形(contact manifold)， ω_0 為 X 的切觸形式(contact form)， $HX := \text{Re}T^{1,0}X$ 為 X 的切觸平面(contact plane)。切觸流形的研究

是當今的幾何學及數學物理上的重要課題。

(ii) 假定 X 上存在一個局部自由的 S^1 作用 (locally free S^1 action)。我們把 $e^{i\theta}$ 記為這個 S^1 作用且令 T 為這個 S^1 的作用引出的向量場 (vector field induced by $e^{i\theta}$)。如果類比形式在 X 上的每一點均為正定 (我們稱 X 為強擬凸 (strongly pseudoconvex)) 且這個 S^1 作用滿足底下的兩個條件：

$\mathbb{C}T_x X = T_x^{1,0} X \oplus T_x^{0,1} X \oplus \mathbb{C}TX$ ，對所有 X 上的點 x ，

$$[T, C^\infty(X, T^{1,0} X)] \subset C^\infty(X, T^{1,0} X),$$

則我們稱 $(X, T^{1,0} X)$ 是一個佐佐木流形 (Sasakian manifold)。佐佐木流形是數學物理尤其是弦論裡很重要的一類流形。值得注意的是， X/S^1 為一個複軌形 (complex orbifold) 或是複流形 (complex manifold)。

從以上 (i) 及 (ii) 可看出科西黎曼流形的研究密切的牽涉到切觸流形，佐佐木流形，複軌形及複流形的研究。科西黎曼流形上的研究，均能夠有效的推動切觸流形，佐佐木流形，複軌形及複流形上的發展。這也就是為何這幾年科西黎曼流形在幾何及數學物理裡扮演著非常重要的角色。除此之外，科西黎曼流形的研究牽涉到的算子是一個連次橢圓性都缺乏的算子 (non-hypoelliptic operator) (參看底下的說明)，因此科西黎曼流形上的研究也能推動分析及偏微分方程的發展。

令 $\tau: \mathbb{C}T^* X \rightarrow T^{*0,1} X$ 為根據給定的赫米訓度量而衍生的垂直投影。我們把底下的算子

$$\bar{\partial}_b := \tau \circ d: C^\infty(X) \rightarrow \Omega^{0,1}(X) := C^\infty(X, T^{*0,1} X)$$

稱為切線的科西黎曼算子 (tangential Cauchy-Riemann operator)，其中 d 表示著一般流形上的外微分導數。 $\bar{\partial}_b$ 算子是科西黎曼幾何裡最重要的算子之一。在科西黎曼幾何裡非常重要的課題是要知道如何處理 $\bar{\partial}_b$ 算子並構造出許多的科西黎曼函數。在這邊，我們說一個平滑函數 $u \in C^\infty(X)$ 為一個科西黎曼函數如果 $\bar{\partial}_b u = 0$ 。但這樣的研究最大的困難在於一般而言， $\bar{\partial}_b$ 算子是一個連次橢圓性都缺乏的算子。我們回憶一下有關次橢圓算子的定義。我們說一個 X 上的偏微分算子 E 為次橢圓的如果對某個 X 上的分佈 (distribution on

X) u ，若 Eu 為平滑的，則 u 必為平滑的。

我們看一個簡單的例子來說明一下 $\bar{\partial}_b$ 的非次橢圓性。

例子：考慮 $H_{n+1} := \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 。可看出 H_{n+1} 為一個 $2n+1$ 維的平滑流形。令 $(z, t) = (z_1, \dots, z_n, t)$ 為 H_{n+1} 的座標，其中 $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$ 為複座標， $j = 1, \dots, n$ 。令

$$T^{1,0} H_{n+1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} + i\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial t}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} + i\bar{z}_n \frac{\partial}{\partial t} \right\},$$

$$\text{其中 } \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - i \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right), \quad \bar{z}_j = x_{2j-1} - ix_{2j},$$

$j = 1, \dots, n$ 。透過簡單的計算可驗證 $T^{1,0} H_{n+1}$ 為一個科西黎曼結構。因此， $(H_{n+1}, T^{1,0} H_{n+1})$ 為一個科西黎曼流形。我們通稱 $(H_{n+1}, T^{1,0} H_{n+1})$ 為海森堡群 (Heisenberg group)。

選定 $T = \frac{\partial}{\partial t}$ ，則可驗證

$$\omega_0 = -dt + \sum_{j=1}^n (i\bar{z}_j dz_j - iz_j d\bar{z}_j) \text{ 且}$$

$$T^{*0,1} H_n = \text{span} \{ d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n \},$$

其中 $dz_j = dx_{2j-1} + idx_{2j}$ ， $d\bar{z}_j = dx_{2j-1} - idx_{2j}$ ， $j = 1, \dots, n$ 。給定 H_{n+1} 上的一個分佈 $u \in D'(H_{n+1})$ ，可容易的看出

$$\bar{\partial}_b u = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial z_j} - iz_j \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\bar{z}_j \in D'(H_{n+1}, T^{*0,1} H_{n+1}). \quad (1)$$

從 (1) 式，我們得到如下的結論： $\bar{\partial}_b u = 0$ 若且唯若 $\frac{\partial u}{\partial z_j} - iz_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ，對所有的 $j = 1, \dots, n$ 。令

$$u = \frac{1}{|z|^2 - it}$$

為 H_{n+1} 上的分佈且 $\bar{\partial}_b u = 0$ 。因為 0 為平滑函數但 u 不是平滑函數，我們得到 $\bar{\partial}_b$ 是一個連次橢圓性都缺乏的算子。

從上面的例子可知即使是在簡單的海森堡群上， $\bar{\partial}_b$ 是一個連次橢圓性都缺乏的算子。但在

某些情形下， $\bar{\partial}_b$ 是一個次橢圓的算子。Princeton 大學教授 J. Kohn 在 60-70 年代之間證明了如果類比形式在 X 上的每一點均至少有一個正的特徵值及一個負的特徵值，則 $\bar{\partial}_b$ 是一個次橢圓的算子。但當 X 為強擬凸時， $\bar{\partial}_b$ 是一個連次橢圓性都缺乏的算子。強擬凸的科西黎曼流形是科西黎曼幾何裡最重要的一類流形，因此我們必須要想辦法處理強擬凸的科西黎曼流形上的 $\bar{\partial}_b$ 算子。但困難的地方在於目前連次橢圓性都缺乏的算子在一般的偏微分方程裡沒有任何理論可有效的處理。要處理這一類的算子，最重要的關鍵是要能處理相對應的史瑞克核(Szegö kernel)。我們來介紹一下史瑞克核的定義。從現在開始，除了額外提醒，我們的流形 X 均假定為緊緻的。由 CTX 上給定的赫米訓度量，引出 X 上的積分元素 dv_X 及 $C^\infty(X)$ 上的一組 L^2 內積 $(\cdot|\cdot)$ 。令

$$S: L^2(X) \rightarrow \text{Ker} \bar{\partial}_b$$

為根據這個 L^2 內積 $(\cdot|\cdot)$ 而衍生的垂直投影。我們稱 S 為史瑞克投影(Szegö projection)。令 $S(x, y)$ 為 S 的分佈核(distribution kernel of S)。我們稱 $S(x, y)$ 為史瑞克核。從 J. Kohn 的結果可知，如果類比形式在 X 上的每一點均至少有一個正的特徵值及一個負的特徵值，則 $S(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ 。我們稱 S 為一個平滑算子(smoothing operator)。當 X 為強擬凸時，一個重要課題是要了解 $S(x, y)$ 。若能了解 $S(x, y)$ ，則根據筆者 2010 年的工作[2]可知，我們能處理 $\bar{\partial}_b$ 算子。現今科西黎曼幾何及複幾何的許多發展都牽涉到 $S(x, y)$ 的研究。這方面的一個經典結果為 1976 年由法國數學家 Louis Boutet de Monvel 及瑞典數學家 Johannes Sjöstrand 所得到的結果[1]：假定 X 為一個緊緻的強擬凸的科西黎曼流形，且 $\dim X \geq 5$ 。則

$$S(x, y) = \int_0^\infty e^{i\varphi(x, y)t} s(x, y, t) dt \quad \text{在 } X \times X \text{ 上,} \quad (2)$$

其中上面的積分由震盪積分(oscillatory integral)所給定， φ 是一個複數值的相函數(complex phase function)， $S(x, y, t) \sim \sum_{j=0}^\infty t^{n-j} s_j(x, y)$ 為一個

n 階，形式 $(1, 0)$ 的古典符號(classical symbol of type $(1, 0)$ and order n)。特別的，史瑞克投影 S 為一個複數值的傅立葉積分算子(complex Fourier integral operator)。

以上 Boutet de Monvel-Sjöstrand 的定理大大的推動科西黎曼幾何及複幾何的進展。比如說現今複幾何的 Tian-Yau-Zelditch 漸進展開，古典強擬凸的科西黎曼流形的嵌入問題及複幾何的量子化問題都奠基於 Boutet de Monvel-Sjöstrand 的定理上。

在 2000 年左右，因為一些非強擬凸的科西黎曼流形開始變得重要，比如如何在非投影複流形(non projective complex manifold)上進行量子化等問題都牽涉到關於 $(0, q)$ 形式的史瑞克核的行爲，因此 $(0, q)$ 形式的史瑞克核的研究就變成一個重要的課題。我們來介紹一下 $(0, q)$ 形式的史瑞克核定義。在 CT^*X 上的赫米訓度量引出 $T^{*0,q}X$ 上的一個赫米訓度量。我們也把這個度量記為 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 。這個赫米訓度量 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 及 dv_X 引出 $\Omega^{0,q}(X) := C^\infty(X, T^{*0,q}X)$ 上的一組 L^2 內積 $(\cdot|\cdot)$ 。準確的說，我們有

$$(u|v) = \int_X \langle u|v \rangle dv_X, \quad \forall u, v \in \Omega^{0,q}(X)。$$

令

$$S^{(q)}: L_{(0,q)}^2(X) \rightarrow \text{Ker} \square_b^{(q)}$$

為根據這個 L^2 內積 $(\cdot|\cdot)$ 衍生的垂直投影，其中 $L_{(0,q)}^2(X)$ 為 $\Omega^{0,q}(X)$ 對內積 $(\cdot|\cdot)$ 的完備(the completion of $\Omega^{0,q}(X)$ with respect to $(\cdot|\cdot)$)，且 $\square_b^{(q)} = \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^*$ ， $\bar{\partial}_b^*$ 為 $\bar{\partial}_b$ 根據這個 L^2 內積 $(\cdot|\cdot)$ 的伴隨(adjoint with respect to $(\cdot|\cdot)$)。值得注意的是，當 $q = 0$ 時， $\text{Ker} \square_b^{(q)} = \text{Ker} \bar{\partial}_b$ ，因此 $S^{(0)} = S$ 。我們把 $\square_b^{(q)}$ 稱為孔恩算子(Kohn Laplacian)。大約 2004 年時，瑞典數學家 Hörmander 猜測 $S^{(q)}$ 是跟(2)一樣形式的傅立葉積分算子。這個猜想困難的地方在於，當 $q > 0$ 是，(2)裡的相函數非常難構造且 Boutet de Monvel-Sjöstrand 的方法在 $q > 0$ 時不適用。在工作[2]中，筆者發展出一套微局部熱方程的理論，解決了 Hörmander 的問題，更準確的說，筆者證明了如下的定理：

假定 X 為一個緊緻的科西黎曼流形且類比形式在 X 上為非退化的。若孔恩算子在 L^2 空間內有閉的值域(L^2 closed range), 則 $S^{(q)}$ 是跟(2)一樣形式的傅立葉積分算子。

由以上的結果可知道, 史瑞克核的性質和孔恩算子在 L^2 空間內是否有閉的值域的性質息息相關。值得注意的是, 當 $q = 0$ 時, 孔恩算子在 L^2 空間內有閉的值域若且唯若 $\bar{\partial}_b$ 在 L^2 空間內有閉的值域。又當 X 為一個緊緻的強擬凸的科西黎曼流形, 且 $\dim X \geq 5$, $\bar{\partial}_b$ 在 L^2 空間內有閉的值域。因此筆者在 2010 年的工作[2]推廣了法國數學家 Louis Boutet de Monvel 及瑞典數學家 Johannes Sjöstrand 在 1976 年所得到的經典結果。

以上的工作, 都要求 X 為緊緻的且類比形式在 X 上為非退化的。因為科西黎曼幾何及數學物理的需要, 當 X 為非緊緻的或類比形式在 X 上的某部份退化時, 史瑞克核具有什麼性質是一個非常重要的課題。筆者和德國教授 George Marinescu 的文章[5]可說是這方面目前最完備的結果。在[5]中, 筆者和德國教授 George Marinescu 發展了一套微局部譜分析的方法, 能有效的處理史瑞克核及孔恩算子。除此之外, 我們還引入局部閉值域的概念, 第一次有效的處理退化情形的史瑞克核。更勝者, 我們利用史瑞克核的性質, 刻劃了科西黎曼幾何上的局部嵌入定理。

除了史瑞克核及孔恩算子之外, 科西黎曼流形上另一個非常重要但卻又極其困難的問題是要如何在科西黎曼流形上建立小平邦彥嵌入定理(即投影空間的可嵌入性)。在[6]中, 筆者利用史瑞克核來處理科西黎曼流形上的嵌入問題。和之前的工作如[1], [2]及[5]不同的是, 這邊的史瑞克核更複雜, 不但依賴於奇異點也依賴於線叢的次方, 且這邊的史瑞克核總是半經典退化的。在[6]之前, 這一類的結果幾乎沒有, 若有也只是一些零星的小結果。在[6], 筆者引入微局部分割函數的概念, 證明了若把史瑞克核利用微局部分割函數來切割, 則切割後的史瑞克核為首次出現的傅立葉積分算子, 利用這個新的傅立葉積分算子, 筆者建立了帶有群作用的科西黎曼流形上的小平邦彥嵌入定理。此外, 筆者還引入帶有群作用的科西黎曼流形, 這一類的流形的特例後來證明恰好是弦論最需要的佐佐木流形。我們希望[6]裡的史瑞克核的結果及嵌入定理將會在科

西黎曼幾何及佐佐木幾何裡有很大的應用。

利用史瑞克核來處理連次橢圓性都缺乏的算子的思維及方法, 在其它相關的領域如科西黎曼保角幾何(CR conformal geometry)裡也有著極大的應用。在本文的最後, 筆者將簡單的介紹筆者在這方面的貢獻。

在科西黎曼幾何上如何建立正質量定理, 一直是重要但非常困難的問題。困難的地方在於這個問題牽涉到的奇異孔恩算子(singular Kohn Laplacian)是一個定義在非緊緻的流形上連次橢圓性都缺乏的算子。大約 2004 年左右, 中研院數學所的鄭日新教授, 義大利 Malchiodi 教授及 Princeton 大學 Paul Yang 教授成功的寫下科西黎曼幾何上的正質量定理。但要完整的證明這個正質量定理, 需要建立奇異孔恩算子在無窮遠處的解的存在性及解的正則性。這類的問題不論是在分析或幾何上從來沒有人考慮過, 沒有任何文獻可供參考。筆者和香港中文大學楊葆霖教授從 2009 年開始試著解決這個問題。終於在 2014 年, 在[3]中, 利用史瑞克核的想法, 發展出一套加權 L^2 空間的微局部及調和分析方法, 成功的建立奇異孔恩算子在無窮遠處的解的存在性及解的正則性並完成科西黎曼幾何上的正質量定理。

在科西黎曼保角幾何裡一個重要問題是如何刻劃科西黎曼多重調和函數(CR pluriharmonic functions)。日本著名數學家 Hirachi 猜測所有多重調和函數組成的空間應和科西黎曼潘尼茲算子(CR Paneitz operator)的核只差有限維空間。科西黎曼潘尼茲算子是一個四階且連次橢圓性都缺乏的算子, 非常難處理。在[4]中, 筆者利用史瑞克核的想法發展出一套對科西黎曼潘尼茲算子的微局部霍奇分解定理(Microlocal Hodge decomposition Theorem), 成功的解決了 Hirachi 的問題。

參考文獻

- [1] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő*, Astérisque, 34-35 (1976), 123-164.
- [2] C.-Y. Hsiao, *Projections in several complex variables*, Mém. Soc. Math. France, Nouv. Sér. 123 (2010), 131 p.

- [3] C.-Y. Hsiao and P.-L. Yung, *Solving Kohn Laplacian on asymptotically flat pseudohermitian 3-manifolds*, *Adv. Math.*, 281 (2015), 734-822.
- [4] C.-Y. Hsiao, *On CR Paneitz operators and CR pluriharmonic functions*, (2015), 27 pages, *Math. Ann.*, 362 (2015), no. 3-4, 903-929.
- [5] C.-Y. Hsiao and G. Marinescu, *On the singularities of the Szegő projections on lower energy forms*, 73 pages, to appear in *Journal of Differential Geometry*.
- [6] C.-Y. Hsiao, *Szegő kernel asymptotics for high power of CR line bundles and Kodaira embedding theorems on CR manifolds*, 116 pages, to appear in *Memoirs of the American Mathematical Society*.