模形式

交通大學應用數學系　楊一帆

費馬最後定理(Fermat's Last Theorem)是一個數學中一個相當著名，吸引了許多傑出數學家及業餘數學愛好者的問題。它的敘述很簡單，它斷言如果 n 是一個大於 2 的整數而(x, y, z)是方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

的一組整數解，則 x, y, z 中至少有一爲零。費馬於 1637 年時在一本書某一頁的邊緣寫下一段話，宣稱他有這個敘述的證明，但因爲證明太長，沒有辦法容納在此頁的邊緣，所以就沒寫下。自此之後許多傑出的數學家就試圖證明此敘述，但都未成功，一直到 1995 年時才由懷爾斯(Andrew Wiles)證出。

懷爾斯的證明並不是直接的。在 1955 年左右，日本數學家志村五郎(Goro Shimura)及谷山豊(Yutaka Taniyama)觀察到有些橢圓曲線

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

（其中 A, B 爲滿足 $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ 的有理數）

的算術性質與模形式（modular forms，爲本文的主題，其定義容後再述）的算術性質密切相關，於是他們做出一個在當時相當大膽的猜測，他們猜測每一個橢圓曲線都會對應到一個模形式，此猜測被後人稱爲谷山志村猜想(Taniyama-Shimura conjecture)。這谷山志村猜想跟費馬最後定理之間的聯繫是由 Gerhard Frey 提出，他設想如果(a, b, c)是非零而滿足 $a^n + b^n = c^n$ $(n \geq 3)$的整數，則 $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$會是一個很奇怪的橢圓曲線以至於不可能存在一個對應的模形式，此推論後來由 Ken Ribet 證出。因此，如果谷山志村猜想成立的話，費馬最後定理就成立。事實上，懷爾斯就是透過證明谷山志村猜想來證明費馬最後定理。

鑑於模形式在數學裡的重要性，本文即簡單介紹一下模形式，並描述筆者在模形式理論的一點貢獻。

模曲線，模函數及模形式

在介紹模形式之前，我們先複習一下我們熟悉的週期函數。如果 $f(x)$ 是一個對所有實數 x 及所有整數 n 皆滿足 $f(x+n) = f(x)$ 的函數，我們稱 $f(x)$ 爲一個週期 1 的週期函數。換句話說，週期函數是一個擁有許多對稱性的函數，而其對稱性可用整數這個集合來描述。我們即將介紹的模形式是一類擁有更多更複雜的對稱性的函數。

令 N 爲一正整數，並令

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1, N \mid c \right\}$$

爲所謂的模群(modular group)，其中 $\mathbb{Z}$ 代表整數所形成的集合，而 $N \mid c$ 這符號代表 N 整除 c。我們可以很容易驗證如果 z 是一個落在複數平面上半平面 $\mathbb{H}$ 的複數（即 z 是一個虛部大於零的複數），則對任意 $\Gamma_0(N)$ 裡的元素 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$(az+b)/(cz+d)$ 也會是一個落在 $\mathbb{H}$ 的複數。因此，給一個定義於 $\mathbb{H}$ 的函數 $f(z)$ 和一個 $\Gamma_0(N)$ 裡的元素 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，我們可以定義一個新的定義於 $\mathbb{H}$ 的函數

$$f \mid \gamma : z \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) 。$$

如果對所有 $\Gamma_0(N)$ 裡的元素 γ，我們皆有 $f \mid \gamma = f$，且 $f(z)$ 是一個亞純函數（meromorphic function），我們便稱 $f(z)$ 是一個 $\Gamma_0(N)$ 上的模函數(modular function)[1]。總而言之，所謂 $\Gamma_0(N)$ 上

[1] 嚴格來說，我們還需要 $f(z)$ 滿足一些在尖點的解析性質，我們在此略過不提。

的模函數是一個擁有許多對稱性的亞純函數，而其對稱性可用$\Gamma_0(N)$這個集合來描述。

以上對模函數的介紹是從定義在$\mathbb{H}$的複變函數的角度出發，但一個較好的看法是把模函數看成是模曲線上的函數，因爲這樣可以引進黎曼曲面(Riemann surfaces)的理論。所謂的模曲線(modular curves)定義如下。假設Γ是

$$SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

的一個有限指數子群(subgroup of finite index)，我們把一個$\mathbb{H}$裡的點z跟所有$(az+b)/(cz+d)$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$，都當做是等價的點，那麼$\Gamma$所對應的模曲線就是所有這樣的等價類所成的集合，符號上我們把其寫成$Y(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{H}$，而$\mathbb{H}$上的複數結構就給了$Y(\Gamma)$一個自然的黎曼曲面結構。這黎曼曲面$Y(\Gamma)$並不是緊緻的(compact)，爲了緊緻化$Y(\Gamma)$，我們會在$Y(\Gamma)$上附加幾個點，這些點被稱做是尖點(cusps)，而緊緻化後的模曲線被記作$X(\Gamma)$。在$\Gamma=\Gamma_0(N)$的情況，我們也把$X(\Gamma)$記作$X_0(N)$。

更進一步而言，我們可以將模函數的定義推廣如下。令k爲一個整數，給一個定義於$\mathbb{H}$的函數$f(z)$和一個$\Gamma_0(N)$裡的元素$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，我們可以定義一個新的定義於$\mathbb{H}$的函數

$$f|_k \gamma : z \mapsto (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)。$$

如果$f(z)$是一個定義於$\mathbb{H}$的全純函數(holomorphic function)，且對所有$\Gamma_0(N)$裡的元素γ，我們皆有$f|_k \gamma = f$，我們便稱$f(z)$爲一個$X_0(N)$上權k的模形式。很顯然的，所有$X_0(N)$上權k的模形式會形成一個複數向量空間，我們將此空間記作$M_k(N)$，此空間有個很自然的內積(inner product)。利用黎曼曲面的理論，我們可以得知此向量空間是有限維的。

模曲線$X_0(N)$及其上的模形式在數學裡非常重要，其中模曲線是橢圓曲線的模空間，所以它們及模形式的算術性質跟橢圓曲線的算術性質密切相關。它們是數論及表現理論的核心研究課題之一，也與數學其他領域如代數幾何，數學物理，微分方程，圖論，編碼理論，及密碼學等等皆有關聯。許多當代數學最重要的問題，如黎曼猜想(Riemann hypothesis), Birch and Swinnerton-Dyer conjecture[2]，皆與模曲線及模形式相關。另如前述谷山志村猜想即爲現今數學最核心問題之一的 Langlands Program 的特例。

Hecke 算子

一個爲什麼模形式在數學裡非常重要的原因，是其上有所謂的 Hecke 算子(Hecke operators)。假設$f(z)$是一個$X_0(N)$上權k的模形式而p是一個與N互質的質數，我們定義一個新的函數

$$T_p f : z \mapsto p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1} f\left(\frac{z+a}{p}\right)。$$

我們可以很容易地驗證$T_p f$仍舊是一個$X_0(N)$上權k的模形式，因此，

$$T_p : f \mapsto T_p f$$

是一個$M_k(N)$的線性算子，被稱做爲第p個 Hecke 算子。這些算子互相可以交換（即$T_pT_q f = T_qT_p f$），並且針對$M_k(N)$上的內積爲自伴（self-adjoint，即$\langle T_p f, g\rangle = \langle f, T_p g\rangle$，其中$\langle \cdot,\cdot \rangle$代表內積），所以一個線性代數裡的定理就跟我們講，存在一組$M_k(N)$的基底B，使得這基底裡面所有的元素對所有的 Hecke 算子都是特徵向量，亦即

$$\forall f \in B, \forall p, \exists \lambda_{f,p} \in \mathbb{C} \text{ such that } T_p f = \lambda_{f,p} f。$$

如果$f(z)$是一個$M_k(N)$裡的模形式使得其對所有的 Hecke 算子都是特徵向量，我們便稱$f(z)$是一個特徵模形式(Hecke eigenform)。前面提到的谷山志村猜想更精確的講，指的是每一個

[2] 這兩個問題名列七個世紀問題(Millennium Problems)之中。

橢圓曲線都會對應到一個特徵模形式 $f(z)$，使得此橢圓曲線在有限體$\mathbb{F}_p$ 上共有 $p+1-\lambda_{f,p}$ 個點，其中$\lambda_{f,p}$爲 $f(z)$ 對 Hecke 算子的特徵值。換句話說，模形式的算術性質會跟我們講橢圓曲線的算術性質。事實上，所謂的 Langlands program，其基本概念說的就是一個幾何物件的算術性質會跟一些特別的多複變函數的算術性質聯繫在一起。

四元代數及志村曲線

我們接下來介紹一個模曲線的重要推廣。

我們先定義所謂的四元代數（quaternion algebras)[3]。令 B 爲一個維度 4 的有理數向量空間，並令 $\{1, i, j, k\}$ 爲 B 的一組基底，換句話說，

$$B=\{a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}\text{ 。}$$

我們給 B 一個乘法結構如下。選定兩個非零的有理數 a, b，令

$$i^2=a,\quad j^2=b,\quad ij=-ji=k$$

並要求乘法滿足結合律而 1 爲乘法單位元素，然後將乘法規則透過線性延伸到整個B上（如 $(3i+2j)(2i-j)=6i^2 4ji=3ij-2j^2=(6a-2b)-7k$）。這樣定義出來的結構被稱做爲一個四元代數。另外，我們稱 B 的一個子集合$\mathcal{O}$爲一個 order 如果$\mathcal{O}$本身是一個環(ring)並且存在四個元素 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{O}$ 使得$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$爲 B 的一組基底而 $\mathcal{O}=\{a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$。

事實上，四元代數並不是離我們很遙遠的概念。比如說，所有二乘二的有理數矩陣所成的集合 $M(2, \mathbb{Q})$ 就是一個四元代數，這是因爲如果我們令 $a=b=1$，且

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

那麼$\{1, i, j, k\}$的確是 $M(2, \mathbb{Q})$ 的一組基底，且 $M(2, \mathbb{Q})$ 的乘法規則的確如同上面所描述的。另外，我們可以驗證 $M(2, \mathbb{Z})$ 是一個 $M(2, \mathbb{Q})$ 的 order。事實上，對任意正整數 N，

$$\left\{\begin{pmatrix}s&t\\u&v\end{pmatrix} : s, t, u, v \in \mathbb{Z}, N \mid u\right\}$$

也都是 order。另一個常見的例子是漢彌爾頓的四元數(Hamilton’s quaternions)，這是在大學代數裡常舉的非交換可除代數(noncommutative division algebra)的例子，其中 a, b 皆爲 -1。

注意到我們可以很容易驗證 $k^2=-ab$，而 $a, b, -ab$ 這三數要不皆爲負，要不就是恰好二正一負。因此四元代數大致可以根據這兩種情況分爲兩類，如果此三數皆爲負，我們稱此四元代數爲定四元代數(definite quaternion algebra)，如果是二正一負，我們稱此四元代數爲不定四元代數(indefinite quaternion algebra)。這兩類四元代數一個主要的性質差異是我們可以把一個不定四元代數嵌入(embed)到 $M(2, \mathbb{R})$。比如說如果 $a, b>0$，那麼一個嵌入法是

$$1\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, i\mapsto\begin{pmatrix}0&\sqrt{a}\\\sqrt{a}&0\end{pmatrix} j\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{b}&0\\0&-\sqrt{b}\end{pmatrix},$$

$$k\mapsto\begin{pmatrix}0&-\sqrt{ab}\\\sqrt{ab}&0\end{pmatrix}\text{ 。}$$

而一個定四元代數則無法被嵌入 $M(2, \mathbb{R})$。

現在我們定義志村曲線。假設 B 是一個不定四元代數，固定一個嵌入$\phi : B \hookrightarrow M(2, \mathbb{R})$。給定一個 order $\mathcal{O}$後，我們令

$$\Gamma(\mathcal{O}) := \left\{\begin{pmatrix}s&t\\u&v\end{pmatrix} \in \phi(\mathcal{O}) : sv-yu=1\right\},$$

其爲 $SL(2, \mathbb{R})$的一個離散子群(discrete subgroup)。跟$\Gamma_0(N)$的情況一樣，我們可以定義一個黎曼曲面$Y(\mathcal{O}) := \Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathbb{H}$，並令$X(\mathcal{O})$爲$Y(\mathcal{O})$緊緻化後的緊緻黎曼曲面，稱作爲一個志村曲線(Shimura curve)。如果 B 不是一個跟 $M(2, \mathbb{Q})$同構的四元代數，那麼$Y(\mathcal{O})$本身即是緊緻，不需額外再加一些尖點（換句話說，$Y(\mathcal{O})=X(\mathcal{O})$）。

[3]四元代數可定義於任意體上，在本文爲了方便起見，我們只考慮有理數體上的四元代數，以下所提的各種定義也僅適用於有理數體上的四元代數。

注意到當 $B = M(2, \mathbb{Q})$, $\mathcal{O} = \left\{\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} : s, t, u, v \in Z, N \mid u\right\}$ 時，我們有 $\Gamma(\mathcal{O}) = \Gamma_0(N)$ 而 $X(\mathcal{O}) = X_0(N)$ ，所以模曲線是志村曲線的特例，而志村曲線是模曲線的推廣。就如同模曲線是橢圓曲線的模空間一樣，志村曲線也有模空間的幾何意義，它們是帶有四元乘(quaternionic multiplication)的阿貝耳面(abelian surface)的模空間，其中帶有四元乘的阿貝耳面意指它的自同態代數(endomorphism algebra)包含一個四元代數。

志村曲線上的模函數及模形式

令 $X(\mathcal{O})$ 為一志村曲線，其上的模函數及模形式的定義與模曲線的情況一樣。如果 $f(z)$ 是一個定義於上半平面 $\mathbb{H}$ 的亞純函數，且對所有 $\Gamma(\mathcal{O})$ 裡的元素 γ 我們皆有 $f \mid \gamma = f$ ，我們便稱 $f(z)$ 為一個模函數。同樣的，如果 $f(z)$ 是一個全純函數，且對所有 $\Gamma(\mathcal{O})$ 裡的元素 γ 皆滿足 $f \mid_k \gamma = f$ ，我們便稱 $f(z)$ 為一個權 k 的模形式。令 $M_k(\mathcal{O})$ 為所有權 k 的模形式所成的複數向量空間，其上也可以定義 Hecke 算子 T_p（唯其定義方式並非上面所描述的），而且存在一組 $M_k(\mathcal{O})$ 的基底使得這基底裡面所有的元素對所有的 Hecke 算子都是特徵向量。如果 $f(z)$ 是一個 $M_k(\mathcal{O})$ 裡的模形式使得其對所有的 Hecke 算子都是特徵向量，我們便稱 $f(z)$ 是一個特徵模形式(Hecke eigenform)。

僅就算術性質而言，志村曲線跟模曲線非常類似。事實上，如果 $f(z)$ 是志村曲線上權 k 的特徵模形式，那麼就存在一個模曲線上權 k 的特徵模形式 $g(z)$，使得除了有限個特殊的質數外，$f(z)$ 跟 $g(z)$ 針對 Hecke 算子 T_p 的特徵值皆相等，這性質在數學裡被稱為 Jacquet-Langlands 對應。

儘管志村曲線跟模曲線上的模形式擁有非常類似的算術性質，但以實際構造及應用而言，這兩類困難度差異頗大，主要的原因是模曲線有尖點，而一般的志村曲線沒有尖點。在有尖點的情況下，我們有 Eisenstein series，Poincare series，theta series, Dedekind functions 等各種方法去構造模形式，而且它們的傅立葉展開也不難計算，因此在應用上面相對容易許多。而在沒有尖點的情況下，以上的方法皆不可行，在以往我們幾乎沒有任何好的方法去構造及應用模形式，一直到近幾年我們才有較好的工具發展出來，在下一節中我們將簡單介紹一下筆者在這方面的一點貢獻。

志村曲線上模形式的構造及應用

在此節中我們將介紹兩個構造志村曲線上模形式的方法。

第一個方法是利用一個古典的定理，它說如果 $f(z)$ 是一個權 k 的模形式而 $t(z)$ 是一個非常數的(nonconstant)模函數，那麼把 $f(z)$, $zf(z)$, ..., $z^k f(z)$當做是 t 的函數後，它們會滿足一個 $k+1$ 階的常微分方程，而微分方程的係數都會是代數函數(algebraic functions)。現在注意到我們可以很容易驗證 $t'(z)$ 是一個權 2 的亞純模形式，因此，把 $t'(z)^{1/2}$ 當做是 t 的函數後，它會滿足一個二階常微分方程。因為這樣的微分方程跟 t 與 z 的舒瓦茲導數(Schwazian derivative)有關，我們把這個二階微分方程稱做 t 的舒瓦茲微分方程。當 s 是另一個模函數時，s 的舒瓦茲微分方程只是 t 的舒瓦茲微分方程的一個代數轉換。因此，我們可以視舒瓦茲微分方程為一個志村曲線內建的微分方程，所以舒瓦茲微分方程在志村曲線的理論中是一個重要的物件。以實際計算或應用而言，在很多時候，我們僅需知道志村曲線極少的資訊即可決定其舒瓦茲微分方程。比如說，如果一個志村曲線只有三個橢圓點(elliptic points)而虧格(genus)為零，那麼其舒瓦茲微分方程基本上就是一個超幾何微分方程(hypergeometric differential equation)。另如在[5]中，筆者的學生即用志村曲線之間的覆蓋決定了不少志村曲線的舒瓦茲微分方程。

在[7]，筆者證明當一個志村曲線虧格為零時，它上面的模形式皆可用其舒瓦茲微分方程的解表示。更進一步地，我們可以利用志村曲線的模多項式(modular polynomial)及 Jacquet-Langlands 對應去計算 Hecke 算子如何作用在這些模形式。據筆者所知，在數學裡，這是第一次我們可以針對志村曲線上實際給出的模形式算出 Hecke 算子的作用。想當然爾，這樣的工具會有不少應用。比如說，我們之前提到當一個志村曲線虧格為零而有恰好三個橢圓點時，它的舒瓦

茲微分方程基本上是一個超幾何微分方程。換句話說，它上面的模形式皆可用超幾何函數(hypergeometric function)來表示，其中超幾何函數的定義為

$${}_2F_1(a,b;c;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}t^n$$

而 $(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1)$ 為所謂的 Pochhammer symbol。利用 Hecke 算子理論及 Jacquet-Langlands 對應，我們可以得到一些有趣的超幾何函數的特殊值，如

$${}_2F_1\left(\frac{1}{24},\frac{7}{24};\frac{5}{6};-\frac{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5}{11^4}\right)=\sqrt{6}\sqrt[6]{\frac{11}{5^5}}\text{ 。}$$

Hecke 算子理論也可以用來證明諸如

$$\sum_{n=0}^{\infty}(64584n+972)\frac{\left(\frac{1}{12}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{5}{12}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n n!}\left(\frac{2^2\cdot 3^7}{5^6}\right)^n$$
$$=\frac{2^3\cdot 3^5\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{5\sqrt{5}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

等等式，其中 $\Gamma(x)$ 為 Γ-函數，而等式右邊的常數應解釋為帶複乘(complex multiplication)的橢圓曲線的週期(period)的倒數（詳見[8]）。這是古典 Ramanujan 等式的一個類比 [4]。

我們也可以模形式理論證明一些超幾何函數的等式，如

$${}_2F_1\left(\frac{1}{20},\frac{1}{4};\frac{4}{5};\frac{64t(1-t-t^2)^5}{(1-t^2)(1+4t-t^2)^5}\right)$$
$$=(1-t^2)^{1/20}(1+4t-t^2)^{1/4}{}_2F_1\left(\frac{3}{10},\frac{2}{5};\frac{9}{10};t^2\right)$$

（詳見[6]）。

另一個構造志村曲線模形式的方法是利用 Borcherds 形式(Borcherds form)[5]。限於篇幅限制，我們在這邊無法詳盡介紹 Borcherds 形式。簡短地說，它們是從弱全純向量值模形式(weakly holomorphic vector-valued modular forms)透過 singular theta correspondence 得到的一些特別的正交群上的模形式。有興趣的讀者可參閱 Borcherds 的文章[1]，而針對 Borcherds 形式在志村曲線理論的應用，請參閱[9]。

最早想到 Borcherds 形式可用來構造志村曲線上模形式的可能是 Kudla，他的一位學生 Schofer 證明 Borcherds 形式在一些特殊點的值的公式[4]，而另一位學生 Errthum 則利用 Schofer 的公式探討了兩個志村曲線模函數的特殊值。之後就沒有其他學者再考慮 Borcherds 形式在志村曲線的應用，一個可能原因是沒有好的構造 Borcherds 形式的方法。筆者發現我們事實上可以透過解整數線性規劃(integer programming)的方法去得到一些好的 Dedekind eta product，進而構造出 Borcherds 形式。有了一套有系統地構造 Borcherds 形式的方法後，我們就可以解決不少有關志村曲線的問題。比如說，在[2]中，我們決定了所有超橢圓(hyperelliptic)志村曲線的定義方程式。又如在[3]中，我們決定許多帶有四元乘的阿貝耳面的井草不變量(Igusa invariants)。

值得一提的是我們可以結合上述兩個方法而得到一些超幾何函數的特殊值，如

$${}_2F_1\left(\frac{1}{24},\frac{5}{24};\frac{3}{4};\frac{2^2\cdot 3^7}{5^6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt[8]{45}\sqrt{12+2\sqrt{30}}\,\frac{\omega_{-52}}{\omega_{-4}},$$

其中 ω_{-4},ω_{-52} 為帶複乘的橢圓曲線的週期，見[9]。

---

[4] Ramanujan 證明了很多等式，這邊指的是類似 $\sum_{n=0}^{\infty}(6n+1)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(n!)^3}=\frac{4}{\pi}$ 的等式。

[5] Borcherds 在 1998 年時因為證明了怪獸月光猜想(monstrous moonshine conjecture)而獲得費爾茲獎。這怪獸月光猜想描述怪獸群（monster group，為最大的零星有限單群）的群表現跟模函數的傅立葉展開之間的關係，是另一個模形式出現在其他數學領域的例子。

參考文獻

[1] Richard E. Borcherds, *automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. 132 (1998), 491-562.

[2] Jia-Wei Guo and Yifan Yang, defining equations of hyperelliptic Shimura curves, preprint (2015).

[3] Yi-Hsuan Lin and Yifan Yang, quaternionic loci in Siegel's modular threefold, in preparation.

[4] Jarad Schofer, *Borcherds forms and generalizations of singular moduli*, J. Reine Angew. Math. 629 (2009), 1-36.

[5] Fang-Ting Tu, Schwarzian differential equations associated to Shimura curves of genus zero, Pacific J. Math. 269 (2014), 453-489.

[6] Fang-Ting Tu and Yifan Yang, algebraic transformations of hypergeometric functions and automorphic forms on Shimura curves, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), 6697-6729.

[7] Yifan Yang, Schwarzian differential equation and automorphic forms on Shimura curves, Compositio Math. 149 (2013), 1-31.

[8] Yifan Yang, *Ramanujan-type identities for Shimura curves*, Israel J. Math., to appear (2015).

[9] Yifan Yang, special values of hypergeometric functions and periods of CM elliptic curves, preprint (2015).