

## [ 研究成果報導 ]

## 反應擴散方程之自由邊界問題

淡江大學數學系 郭忠勝

## 一、前言

自然界中很多現象，不管物理、化學或生物方面，常用反應擴散方程 (reaction-diffusion equation) 或方程組來描述。可見反應擴散方程的研究在科學上具有舉足輕重的地位。通常我們所探討的問題同時具有時間與空間變數。當方程中的空間變數在一個固定的區域(domain)中變化，而且這個區域不是全空間，所對應的問題就是一般常見的所謂「初邊界值問題」(initial boundary value problem)。但是在很多情況下，方程中的空間變數所在的區域會隨時間變動，這就是所謂的「自由邊界問題」(free boundary problem)。由於每個時間對應的空間區域也是未知，故此類問題相對困難且更為有趣。

## 二、平面曲線曲率流之自由邊界問題

在[6]中，我們研究與平面上的曲線(段)變動相關的自由邊界問題。我們所探討的曲線(段)在上半平面上隨著時間變動，其兩個端點沿著水平軸以給定的固定接觸角滑動，曲線本身之演化則由帶有外驅動力(driving force)的曲率流方程(curvature flow equation)來描述。這樣的方程出現在許多有趣的研究領域中，例如，超導旋渦的運動、Belousov-Zhabotinsky 反應和 Allen-Cahn 模型。至於固定接觸角之現象，則可以從研究毛細管滴動力學和潤濕現象中觀察到。在沒有外驅動力的情況下，對於簡單閉合曲線和非簡單閉合曲線(或超曲面)之曲線縮短流(curve shortening flow)，Gage-Hamilton [4]、Grayson [5] 及 Angenent [1] 等人，過去已經有相當經典的廣泛研究。至於沒有外驅動力的自由邊界問題，則出現在多晶體晶粒區域演化的研究中。實際上，關於曲率流的自由邊界問題我們過去有一系列的研究著作。特別地，在著作[2]中，我們證明了

此一自由邊界問題(在沒有外驅動力的情況下)有一個唯一的隨時間縮小的自我相似解。同時，曲線在有限時間內會收縮到一個點而且其漸近行為是以該自我相似解的方式收斂。此現象與曲線縮短流中所發現的不謀而合。

在[6]中，我們的第一個主要結果是關於解的分類。簡單的說，我們的解可分為三大類，即面積擴大型、面積有界型和面積縮小型。這裡所指的面積是曲線與水平軸所圍成的面積。然後，我們詳細刻劃了每個類別中解的漸近行為。事實上，面積擴大型和面積縮小型的解之漸近行為都是由自我相似解所刻劃，只不過前者為前置型(forward self-similar)而後者則為後置型(backward self-similar)。比較有趣的是面積有界型的解之漸近行為可能是穩態解(stationary solution)或行波解(traveling wave solution)。同時，我們也證明了解的凹性質。研究論文[6]中所採用的主要工具之一是所謂「交點數原理」。然而，自由邊界問題的兩個不同解之間的交點個數可能隨時間而增加。為了處理此一困境，我們引進了所謂的「擴展交點數原理」。更確切的說，我們先將每個時間解對應的有界曲線以線性向外延拓至全空間，其對應的交點數稱為擴展交點數。「擴展交點數原理」告訴我們，兩個不同解之間的擴展交點數不會隨時間增加而增加。此外，它嚴格下降只發生在有多重零根時。這對於處理有移動端點之曲線演化問題是一個非常有用的工具。

## 三、物種競爭模型之自由邊界問題

古典的物種競爭模型，物種之棲息地通常假設為固定而不隨時間變動的。在2010年，Du和Lin [3]提出了用自由邊界問題來模擬單個物種的擴張現象，其中最主要的假設是物種棲息地之擴張前沿為未知的所謂自由邊界，同時由於拓荒者之險峻，故物種之密度在擴張前沿為零，而擴

張的機制則是由物種數之空間梯度來決定。他們刻劃了該物種能否成功地擴張棲息地至全空間的準則。

關於此擴張機制的一個很自然問題，就是用類似的自由邊界模型去了解兩個或多個競爭物種對其棲息地的擴張現象。兩個物種競爭系統中的自由邊界問題，目前已經有很多工作發表，有興趣的讀者可參考我們的兩篇研究成果[7]和[8]及其中引用的文獻。特別在[8]中，我們探討了一個絕對優勢競爭對手和一個劣勢競爭對手的擴張現象。它們各自有自己佔領的棲息地，所以我們所探討的自由邊界問題有兩個自由邊界。直觀來說，優勢物種應該總是會將劣勢物種消滅。但是，我們發現事實不然。如果優勢物種所佔領的棲息地沒有跨越一個門檻，則劣勢競爭者可以贏得競爭而將優勢物種消滅。另一方面，也可能會發生這兩種物種都成功地擴張其棲息地至全空間。例如，如果劣勢物種擴張速度夠快使得優勢物種永遠趕不上劣勢物種，則兩種物種都可以成功地擴張而共存。這是以前從未發現的有趣現象。

#### 四、結論

事實上，如前所述，很多不同自然界的現象，所對應的自由邊界問題仍待我們深入去探討及研究。順便一提的是，經濟學上的股市理論，也與自由邊界問題相關。拋售股票的時間點就是對應的自由邊界。本文只舉出兩個例子，供讀者參考，希望能舉一反三。很多自由邊界問題，仍待有興趣的研究者之投入與研究。例如，三個物種之一般競爭系統，由於不具備「比較值原理」

(comparison principle)，其對應的自由邊界問題，仍是一個有待解決的問題。

#### 參考文獻

- [1] S. Angenent, On the formation of singularities in the curve shortening flow, *J. Differ. Geom.* **33** (1991), 601-633.
- [2] X. Chen and J.-S. Guo, Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line, *Math. Ann.* **350** (2011), 277-311.
- [3] Y. Du and Z.G. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010), 377-405
- [4] M. Gage and R.S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, *J. Differ. Geom.* **23** (1986), 69-96.
- [5] M.A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Differ. Geom.* **26** (1987), 285-314.
- [6] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **219** (2016), 1207-1272.
- [7] J.-S. Guo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for a two-species weak competition system*, *J. Dynamics and Differential Equations* **24** (2012), 873-895.
- [8] J.-S. Guo and C.-H. Wu, Dynamics for a two-species competition diffusion model with two free boundaries, *Nonlinearity* **28** (2015), 1-27.