代數多樣體的分類與分佈

臺灣大學數學系　陳榮凱

一、簡介

代數多樣體(algebraic varieties)是代數幾何所研究的主要對象，代數多樣體的分類理論以及雙有理幾何是近二十年來代數幾何的核心課題。就代數多樣體的分類來看，給定一些代數多樣體，透過其幾何不變量之討論，可以決定初步的分類。這種初步的分類我們稱之爲雙有理分類，歸在同一類的不同代數多樣體彼此是雙有理等價的，知名的極小模型理論最主要的目標即是在雙有理等價類當中，尋找或建構一個具有良好幾何性質又容易操作的模型。更進一步，固定的不變量，滿足這些不變量的代數多樣體可以有一些參數表示法，而這些參數空間其本身往往也具有代數多樣體的結構，這就構成了所謂的模空間(moduli space)。

代數多樣體中最重要的不變量有 m-th plurigenera 以及所誘導的小平維度(Kodaira dimension, 通常記爲 κ) 。如果 plurigenera 全部爲零，則 κ 定義爲 $-\infty$；一旦 plurigenus 非零時，便可以構造 Iitaka fibration $f: X \rightarrow Y$ 使得 $\dim X = \dim Y + \dim F$ 且 $\kappa(F) = 0$，其中 F 爲一般點上的纖維，此時定義 $\kappa(X) = \dim(Y)$。略言之，原本維度較高較複雜的上的多樣體 X，可以透過纖維化的手法化簡爲 Y 與 F 。再藉由對 Y 與 F 的理解而得到全空間的性質。這其中一個長期懸而未決的猜想是

Iitakta’s Conjecture C：若 $f: X \rightarrow Y$ 爲一纖維化，則 $\kappa(X) \geqq \kappa(F) + \kappa(Y)$。

事實上，透過上述的觀點，κ-∞的代數多樣體、$\kappa = 0$ 的代數多樣體、以及 $\kappa = \dim$（一般型）的代數多樣體三大類可視爲分類理論中的三大基石。

舉例而言，若我們考慮二維代數曲面，極小模型可以很容易地透過壓縮(-1) – curve 得到。對於極小曲面來說，當 $\kappa=-\infty$時，我們會得到 ruled surface $f: X \rightarrow C$，其中 C 是曲線，一般纖維 F 是 rational curve $\mathbf{P}^1$。當 $\kappa = 0$ 時，進一步利用 Albanese map 可以得到 abelian surfaces ($q(X) = 2$)；hyperelliptic surfaces ($q(X) = 1$)；K3 surfaces and Enriques surfaces ($q(X) = 0$)。當 $\kappa = 1$ 時，會得到 elliptic surface。$f: X \rightarrow C$，其中 C 是曲線，一般纖維是 elliptic curve。當 $\kappa = 2$ 時，我們稱之爲一般型曲面。更進一步來看，例如 principally polarized abelian surfaces 可以由一個 3 維的代數多樣體形成其參數空間。

然而到了高維度的時候，數學家便遭遇各式的困難。首先極小模型的存在性與其他性質，只有在 3 維是完全解決的，即使在 3 維的情況，極小模型也可能帶有 singularities。此外像是 Conjecture C，目前 6 維以下已知是成立，更高維度則仍是未知的。這些高維度的挑戰近年來有一些令人驚喜的進展。

二、$\kappa = 0$ 的代數多樣體

$\kappa = 0$ 的代數多樣體因其特有的對稱性，於理論物理與數論以及密碼學等方面有相當重要的應用。對於一般 $\kappa = 0$ 的代數多樣體， Ueno 猜想描繪出這類多樣體的結構：亦即此類代數多樣體透過 Albanese 纖維化均可以理解爲由 abelian varieties 和 Calabi-Yau varieties 所拼組而成。經過近十年的努力，透過與 Hacon 教授的合作，我們證明了 Ueno 猜想中的小平維度猜想，也同時解決 Iitakta’s Conjecture 的部分情形。這篇論文於 2011 年發表於 Invent. Math.。其中最主要的方法是透過 derived category 上的 Fourier-Mukai transform 的方法探討 pluricanonial sheaf 的 push-forward。這背後的突破，事實上是利用了 twisting by multiplier ideal sheaves，來得到 vanishing of higher cohomology。再將 Fourier-Mukai transform 推廣至非 coherent sheaves 的情形所得到。

事實上，利用在這一系列長期的合作中所發展出的方法，特別是 derived category 以及

Fourier-Mukai transform 的幾何應用，我們成功地探討 pluricanonical sheaf 的 positivity，進而得到 generically base point freeness，這些概念之後被推廣為 M-regularity, GV-sheaves 等等，也開啓了日後許多關於 irregular varieties 的研究。

三、一般型的三維多樣體

關於一般型的多樣體，數學家關心的是 geography of varieties，亦即不變量的分布情形。當維度是 1 或是 2 的時候，亦即曲線或是曲面時，主要的不變量均是整數，所以可以得到相當簡潔的結果。然而維度大於 2 時，這些不變量先天上有可能只是有理數。直到約 10 年前，數學家才證明對於固定維度的所有一般型多樣體，其正則體積(canonical volume)有一固定下界，然而此理論上存在的下界其正確數值為何？即使在三維時也是未知的。

透過與復旦大學的陳猛教授的合作，我們著手探討三維代數多樣體(3-folds) 上面的問題。我們首先引進 singularities 之間的一種排序以及形式上的逼近，並進而創造 singularities 的聚包(packing)與解包(unpacking)的概念。透過這些新創的手法，得以成功地解決了一般形的三維多樣體相當多懸而未決的問題。具體的結果如 12-th plurigenus $p_{12} > 0$，24-th plurigenus $p_{24} > 1$，正則體積≧1/1680 等。其實這類 singularities 的細緻分析與探討，對其他 3-folds 的雙有理幾何都有一些應用，例如對於三維 Q-Fano 多樣體，會得到精確的逆正則體積下界 1/330。

從這一系列研究所引發出來自然的問題是一般型的三維多樣體其不變量分佈的問題。對於一般型的代數曲面，其正則體積與虧格數所形成的整數數對$(Vol,\ p_g)$不會是任意正整數，而是會落在 Miyaoka-Yau 不等式以及 Noether 不等式 $Vol \geqq 2p_g - 4$ 所包圍的區域。我們發現在三維時，正確的 Noether 不等式應該為 $Vol \geqq 4/3\, p_g - 10/3$。

四、三維雙有理幾何

在雙有理等價(birationally equivalent)的多樣體中，找尋或是構造最容易研究的極小模型(minimal model)是極小模型理論的主要目標，基本的操作是將一些可能多餘的部分透過 flips 和 divisorial contractions 來縮減。然而這些操作在三維以上時往往會產生 singularities，Mori 透過三維 singularities 的分類成功地證明三維極小模型的存在。對於更高維度時，則預期透過數學歸納法來處理。然而目前尚未能解決的是 4 維以上的 termination of flips 以及 abundance conjecture。

最近幾年，我們嘗試處理三維極小模型理論(minimal model program)的具體描述，對於其中的雙有理映射有非常具體的描述，例如將 flips 和 divisorial contractions to a curve 分解成 blowups 和 weighted blowups 等具體而基本的雙有理映射。這些工作也提供了奇點消解(resolution of singularities)以及線性系的基點消解(resolution of base points of linear system)的具體方法。上述的 Noether 不等式的證明的關鍵事實上就是利用基點消解的具體方法而得到的。

五、結語

透過上述一系列關於代數多樣體的分類與分佈的研究，我們對於高維度代數多樣體的雙有理幾何有更清楚的了解，特別是三維多樣體的幾何。我們似乎可以預期在不久的將來，三維多樣體的幾何可以有類似於曲面理論般簡潔清楚的描述。