[研究成果報導]

物理量的量子值和量子時空 –
不是隱藏變量，是變量的“隱藏”值

中央大學物理學系　江祖永

自物理學的量子革命以來已近百年，愛因斯坦，薛定諤，德布羅意等大師對標準（哥本哈根學派）量子力學的不滿好像仍未得到完滿解答。仍然有物理學家在尋找隱藏變量(hidden variables)。在對深微觀尺度量子時空的研究中繞了個大圈子，我相信我們終於得到量子力學完整的答案 -- 沒有隱藏變量，但變量有“隱藏”或更確切地說被忽視的值[1]，用上它們的全部資訊才是量子力學完整的描述。一個物理量在固定態的（量子）值是量子資訊，它有無窮多個實數的內容。量子時空的非交換坐標作爲物理量也一樣，**三個位置$\hat{x}_i$和三個動量$\hat{p}_i$算符就是那無窮維（投影）希爾伯特空間的一套坐標**[2]，**這空間**不僅是單一粒子的相空間，並且**就是量子力學背後應有的物理空間的數學模型**[3, 4]。那無窮維到六維或三維的古典近似[3]，也只有從這非交換坐標看才容易直觀理解。

海森堡本人（還有 Ivanenko）已有量子時空的想法。非交換幾何作爲一個數學領域，卻要到 90 年代才由康納斯(Connes)創建。數學家是從代數幾何的方法看出作爲一個幾何空間上的函數組成的交換代數，可以看作是那空間一體兩面的描述，幾何觀念可以用代數觀念來建構，非交換代數就有非交換幾何。物理學家應能想到所有物理量組成的代數就是其理論時空或空間的對應，量子力學必然是非交換空間的粒子動力學。實際上，一個粒子動力學理論背後的物理空間模型唯一的合理觀念，必須對應一個自由粒子的所有可能位置。這些位置是不同的態個別確定的位置，而不是怎麼我們沒有看時不能說月亮在不在的位置。把牛頓粒子的理論改成量子力學卻保留其牛頓空間模型，並不合理。如果我們不確定能怎麼講清楚這些位置的空間，量子態的相空間卻是絕不含糊，它就是那無窮維投影希爾伯特空間。我們倒是從量子相對論的群表示理論，推斷出這量子相空間與古典相空間不同，它不能分割成位置/位形空間和動量空間[3, 4]，因此它就是量子力學背後的物理空間模型。跟愛因斯坦狹義相對論中空間和時間不能分割相同，只有在其牛頓近似中兩部分才能獨立描述。玻恩(Born)就有相空間應該才是眞正的時空模型的想法。我們這些工作，已成功地對所有這些問題給出一致的描述。整套理論的牛頓近似，可以通過對稱收縮(symmetry contraction) [5]的數學獲得，答案完全正確[3, 4]。整套理論方法可用於基本的量子相對論對稱[6]，其對稱收縮應可給出這量子力學理論然後牛頓力學作爲近似[7]。

筆者從學習量子力學開始便在想量子時空，在博士班就完全相信量子重力該是非交換幾何的動力學，通過部分有關數學的學習含糊的想法才慢慢有點成形，卻是在從事超 GeV 尺度高能物理研究二十年後才看到可能攻頂的登山口。一直相信那麼多多少由量子物理催生的像群表示理論、算符代數、及非交換幾何等當代數學 應該能讓我們更好的了解量子物理和時空。這裡報告的只是多年的專注努力後攻克的第一個小山崗，前路漫漫。這簡報倒基本是以研究所力學及希爾伯特空間量子力學的數學寫出的故事。所有結果在投影希爾伯特空間有完全對應，只是數學要複雜些。

辛幾何是所有動力學的基礎

辛幾何(symplectic geometry)是古典力學的幾何圖像，連電磁理論及廣義相對論也可以寫成辛幾何，較新的認識是量子力學也一樣。

牛頓粒子的力學相空間是個六維辛幾何，運

動方程應看作

$$\frac{d}{d\sigma}f=\{f,H_\sigma\}$$

的一例，公式右側的是物理量f與哈密頓函數H_σ的泊松括號(Poisson bracket)。上述方程只是辛幾何上的對稱描述，任一哈密頓函數生成的流，是在相空間上H_σ值相同的點連成的線，σ值在其上單向增加，其任一物理量f在線上滿足這微分方程。選定坐標則f與H_σ皆爲其函數，而{ , }可寫成坐標的偏微分，如

$$\{f,H_\sigma\}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H_\sigma}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H_\sigma}{\partial x_i}\right)。$$

取H_σ爲能量函數則σ是時間t，再選f爲坐標x_i或p_i就是哈密頓運動方程，

$$\frac{\partial x_i}{dt}=\frac{\partial H_t}{\partial p_i}\ ,\ \frac{\partial p_i}{dt}=-\frac{\partial H_t}{\partial x_i}\ ,$$

這方程當然可以不同的坐標寫。量子力學的運動方程，薛定諤及海森堡方程，均可以寫成同樣的微分方程，它們是同一方程用不同坐標的表達。

海森堡與薛定諤圖像轉換是坐標轉換

單一粒子的薛定諤方程

$$\frac{d}{dt}|\phi\rangle=\frac{1}{i\hbar}\ \hat{\mathrm{H}}|\phi\rangle$$

可以改寫爲哈密頓方程，其希爾伯特空間的實數正則坐標對可用量子態

$$|\phi\rangle=\sum_n z_n|n\rangle\ ,$$

($z_n=q_n+is_n$)在任一正交基的q_n跟s_n（n從一到無窮），能量哈密頓函數爲

$$H_t(q_n,s_n)=\frac{\langle\phi|\hat{H}\phi|\rangle}{2\hbar}\ ,$$

$\hat{H}$爲能量哈密頓算符。q_n爲位形變量而s_n是共軛動量變量。希爾伯特空間的辛幾何給出其爲基本運動方程的一例，泊松括號(P.B.)爲

$$\{f,H_\sigma\}=\sum_n\left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial H_\sigma}{\partial s_n}-\frac{\partial f}{\partial s_n}\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_n}\right)，$$

同樣有$\frac{dq_n}{dt}=\{q_n,H_t\}=\frac{\partial H_t}{\partial s_n}$及$\frac{ds_n}{dt}=\{s_n,H_t\}=-\frac{\partial H_t}{\partial q_n}$。這裡我們把那希爾伯特空間視作量子粒子的相空間。後者不可分割成位形空間和動量空間可以很容易地被理解，因爲$|\phi\rangle$的相位轉變會把z_n乘上$e^{i\theta}$，讓位形變量和動量變量混在一起。

海森堡方程是

$$\frac{d}{dt}\beta=\frac{1}{i\hbar}[\beta,\beta_t]，\qquad(\beta_t=\hat{H})，$$

其右側不僅在古典極限是牛頓粒子的 P.B.，並且完全該被視爲那兩希爾伯特空間算符的 P.B. $\{\beta,\beta_t\}$，至少它滿足 P.B.的抽象代數定義。把代表物理量的各算符看作六個$\hat{x}_i$和$\hat{p}_i$算符的函數$\beta(\hat{x}_i,\hat{p}_i)$和$\gamma(\hat{x}_i,\hat{p}_i)$，我們可以相同的方式看待如$\frac{\partial\beta(\hat{x}_i,\hat{p}_i)}{\partial\hat{x}_i}$跟$\frac{\partial\beta(x_i,p_i)}{\partial x_i}$，並容易從$[\hat{x}_i,\hat{p}_i]=i\hbar\,\delta_{ij}$看到

$$\frac{\partial\beta}{\partial\hat{x}_i}=\frac{1}{i\hbar}[\beta,\hat{p}_i]\ ,\ \frac{\partial\beta}{\partial\hat{p}_i}=-\frac{1}{i\hbar}[\beta,\hat{x}_i]。$$

算符 P.B.爲

$$\{\beta,\gamma\}=\frac{1}{i\hbar}[\beta,\gamma]\ ,$$

與非交換坐標的內容一致。希爾伯特空間的對稱描述同樣爲一般哈密頓算符β_σ給出

$$\frac{d}{d\sigma}\beta=\{\beta,\beta_\sigma\}，$$

我們也有

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial\beta_t}{\partial\hat{p}_i}\ ,\ \frac{d\hat{p}_i}{dt}=-\frac{\partial\beta_t}{\partial\hat{x}_i}$$

併且是和上述對應薛定諤方程的版本屬於同一辛幾何，事實上它們的關係正是海森堡與薛定諤圖像轉換同樣的數學的直接延伸[4]。

稍多一點細節如下：Cirelli *et al.* [8] 以微分幾何語言寫下了從量子算符到投影希爾伯特空間函數的映射，並寫下這些函數的非交換代數積，他們證明映射是物理量代數的同構(isomorphism)，也就是說找到量子物理量的相空

間函數描述，我們把它寫成同一函數的兩套坐標表達[2]。在希爾伯特空間，z_n的複數坐標下函數的非交換代數積是簡易的

$$H_\beta *_\kappa H_\gamma = \sum\nolimits_{m,n} \hbar \frac{\partial H_\beta}{\partial z_n} 2\delta_{mn} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial \bar{z}_n} = H_{\beta\gamma}\text{，}$$

上式同構可以以算符的矩陣元表示輕鬆驗證（β 到 H_β 明顯是保持代數線性結構--加法和標量乘法的映射），這裡$2\delta_{mn}$其實是以複數坐標寫出的黎曼逆度規(Riemannian inverse metric) $2\delta_{m\bar{n}}$，

$$H_\beta(q_n, s_n) = \frac{\langle\phi|\beta|\phi\rangle}{2\hbar} = H_\beta(z_n, \bar{z}_n)$$

如上。

Ashtekar 和博士生 Schilling [9]用類似的方法寫清楚了量子力學投影希爾伯特空間與希爾伯特空間的辛幾何圖像及其二而一的關係。我們是跟據$\hat{x}_i$和$\hat{p}_i$應該是同一相空間之非交換坐標的思考，基本上用那無窮實數坐標到六個非交換坐標的坐標轉換，爲非交換微分幾何語言下定義，從而推出那代數同構爲同一辛幾何上的函數代數兩套坐標表達，其 P.B.以及辛幾何基本運動方程的表達也一樣[2]。課本上的海森堡與薛定諤圖像轉換是

$$\left\langle\phi\middle|\frac{d\beta}{dt}\middle|\phi\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle\frac{d\phi}{dt}\middle|\beta\middle|\phi\right\rangle + \left\langle\phi\middle|\beta\middle|\frac{d\phi}{dt}\right\rangle\text{。}$$

只需要加上$\|\phi\|$爲固定常數的條件（最宜取作$2\hbar$），把對t的微分延伸到絕對微分或外微分d，如同從上式中拿走分母dt，便能獲得算符外微分的明確的定義及$dH_\beta = H_{d\beta}$，並建構整個非交換微分幾何。數學家雖然已有後者的定義，我們卻是從一個物理理論把它給出，因此毫無疑問能描述自然界，而且還取得跟一般數學定義不盡相同的更長實內容。事實上非交換幾何的數學並未完全定型，其間雖有把抽象的態的空間看作是它的幾何空間，卻不見我們實數坐標到非交換坐標的轉換這種想法。我們是把量子物理薛定諤與海森堡圖像轉換，變成這坐標轉換。

物理量的非交換量子值

物理量算符非交換量子值的觀念也是我們新提出的[1]。每一個實數坐標在固定的態上具有一個實數值，六個非交換坐標的值必須和無窮個實數坐標的值提供相等的信息內容就是說一個抵無窮個。$\hat{x}_i$和$\hat{p}_i$是基本物理量，所有物理量皆爲它們的函數，故然其值也當有無窮個實數的信息內容。事實上，從量子力學看這不難理解。無窮維的希爾伯特空間上的每一算符在固定坐標中完全可用其無窮個矩陣元描述。那不就是無窮個實數嗎。即使我們用馮・恩曼(von Neumann)測量來想，量一次得到的實數本徵值無甚意義，課本說須從多次量測的本徵值之統計分佈算出其期望值，也就是平均值，一般以此期望值爲算符物理量的值。然而，我們得到的完整資訊是個許多實數值的統計分佈，爲何卻只用個平均值。物理量在兩個態上能有同一平均值但甚爲相異的分佈，難道該說它們那物理量相同嗎。

我們細想，整個物理量代數在選定態上那些“值”必須具有與前者至少同態(homomorphic)的代數結構。也就是說，值之間的代數關係不得不跟其物理量的代數關係一致；若$c = b^2 + 2b + 1$則在任意 ϕ 態值$[\phi](c)$和$[\phi](b)$滿足$[\phi](c) = [\phi](b^2) + [\phi](2b) + [\phi](1) = [\phi](b) * [\phi](b) + 2[\phi](b) + 1$，$[\phi]$代表在這態取值的同態映射。$\hat{x}_i\hat{p}_i = \hat{x}_i\hat{p}_i + i\hbar$卻明確要求$[\phi](\hat{x}_i)$和$[\phi](\hat{p}_i)$的積不交換，量子力學物理量值的代數只能是個非交換代數;實數代數只能作爲一個古典理論的值。Ashtekar 和 Schilling 研究了物理量代數由態決定的同構映射[9]，同構故爲一種同態，他們論文倒沒有提到我們這些非交換量子值的想法。我們認爲他們這同構映射可被視爲取值的同態映射[1]。這種映射在希爾伯特空間有簡單數學如下：

$$[\phi](\beta) = (H_\beta, \tilde{X}_{\beta_n} = i\frac{\partial H_\beta}{\partial z_n},$$

$$\tilde{X}_{\beta_{\bar{n}}} = -i\frac{\partial H_\beta}{\partial \bar{z}_n}, \tilde{K}_{m\bar{n}} = -\frac{\partial}{\partial z_m}\frac{\partial H_\beta}{\partial \bar{z}_n})\text{，}$$

式的右側各函數均在態 ϕ 對應的點上取複數值，這正是一個非交換值等同無窮個複數/實數值的描述，且有兩個非交換值的積

$$H_{\beta\gamma} = 2\hbar\sum_n \tilde{X}_{\beta_n}\tilde{X}_{\beta\gamma_{\bar{n}}}\text{，}\tilde{X}_{\beta\gamma_n} = 2i\hbar\sum_m \tilde{X}_{\beta_m}\tilde{K}_{\gamma_{n\bar{m}}}\text{，}$$

$$\tilde{X}_{\beta\gamma_{\bar{n}}} = 2i\hbar\sum_m \tilde{K}_{\beta_{m\bar{n}}}\tilde{X}_{\gamma_{\bar{m}}}，\tilde{K}_{\beta\gamma_{n\bar{m}}} = 2i\hbar\sum_l \tilde{K}_{\beta_{l\bar{n}}}\tilde{K}_{\gamma_{m\bar{l}}}，$$

滿足$[\phi](\beta) *_\kappa [\phi](\gamma) = [\phi](\beta\gamma)$。若以其本徵値爲$\lambda_n$的本徵態爲正交基，加上我們的歸一化條件，物理量$\beta$有

$$H_\beta = \sum_n i\lambda_n|z_n|^2，\tilde{X}_{\beta_n} = i\lambda_n\bar{z}_n，$$

$$\tilde{X}_{\beta_{\bar{n}}} = -i\lambda_n z_n，\tilde{K}_{\beta_{m\bar{n}}} = -\sum_n i\delta_{m\bar{n}}\lambda_n，$$

除了整個態的一個相位因子外基本上均可從測量中獲得，因量子態可以被測定[10]。

解答愛因斯坦-波耳之爭

有了我們的量子空間是其相空間，是無窮實數維或六非交換維的辛幾何，每一物理量有等同無窮個實數的非交換值這些想法和相關數學成果，可看到我們爲量子力學提供了其應有卻一直未被發現的直觀圖像。坐標的非交換值給出唯一的確切位置或態，沒有概率問題，符合愛因斯坦的想法。然而，我們沒有引入任何新變量或修改理論本身，沒有什麼隱藏變量，正如波耳所堅持的，量子力學的理論是完備的。物理量倒是有“隱藏”的值，因人們過於信任物理量有單一實數值的想法讓我們對完整的量子資訊視而不見，只用個期望值。事實上，我們認爲實數值從來只是一個用於古典物理量頗成功的數學模型，實數只是個交換代數，每個實數只是個抽象數學符號。物理量的測量基本上都是與設定標準值進行比較，簡單如用尺子測量某東西的長度，我們是在誤差範圍內把那長度比對到尺子的一段的長度，從而讀出它的值。大自然不曾給我們任何實數值，我們讀出的實數本就是我們自己標記上尺子的。測量設備給出實數讀數，只因我們用實數設定它的輸出讀數。從始至終，單一實數作爲一物理量的值使用只是個模型。在一個我們習慣使用的模型遇到它不足之處時，我們不就應該去尋找新的模型嗎。

說到底，所謂測量當只是我們利用一些我們熟識並能操控的物體（我們的儀器）跟我們要量的物體發生相互作用來獲取有關那物體原本的態的一些資訊之實驗程序而已。想得到可靠的資訊，我們必須對那相互作用從而對儀器輸出讀數和那態的物理量之關係有足夠好的了解，何須擔憂那態受何影響。如此來看，波耳對測量結果必爲古典的強調，在這個量子資訊研究有所發展的時代，已無須關注。況且，我們已論證物理量非交換值至少作爲無窮個實數的表示原則上可以通過實驗確定[1]。我們該努力的，是找出更直接測量這些非交換值的量子資訊技術，它將完全改變實驗物理。請注意與波函數崩塌(wavefunction collapse)有關的所謂測量問題是關於在特定的一種測量過程中的量子態如何演化到量得的本徵值的本徵態的問題，它是關於物理系統加上設備和環境的演化問題，因此與我們關於物理量的值的討論沒有直接關係。

進一步的啓示

我們在此簡短地說說我們的成果對物理和數學發展的意義。

關於時空幾何和量子重力---物理學家在發展跟量子重力理論有關的量子時空模型方面已經做了很多努力，然而量子性一般被認定爲離散性而非非交換性，而量子時空的探索一直脫離了量子力學本身。我們的關鍵思路以爲量子重力必須是量子時空的幾何動力學，其基礎應是在量子力學。我們的成果給出了物理空間的第一個超越牛頓和愛因斯坦觀念而與大自然肯定相關的幾何圖像，量子相空間坐標與可觀測量之間的對立被完全移除，讓海森堡與薛定諤圖像統爲一體。我們的群論框架方法允許套用到一般相信的$x-x$不交換的狀況，併且完全固定在已知物理理論爲近似的設置上。我們的量子空間模型應該是量子時空的進一步模型從下到上的第一個鏈接。

相空間作爲空間/時空---我們給出相空間作爲物理空間/時空的適當模型，這是與基本量子性的海森堡交換關係有內在聯繫的。事實上，辛幾何起著關鍵作用。即使在古典力學中，可觀察的代數亦是相空間函數的代數，代數-幾何的對應關係在物理中的應用可以自然給予空間/時空相應的動力學理論。

非交換幾何的數學---一直在使用非交換坐標的是物理學家，但大部分只是用 x 沒有 p，數學家則喜歡不用坐標的描述。在數學中，態或純態空間在非交換(C*)代數的幾何圖像中的角色

越來越重要，然而，這跟較舊的觀點中關於作爲幾何結構上函數代數的思考像有點不符。我們的成果明確將所有這些整合在一起，並確定非交換幾何具有無限維交換（卡勒/Kahler）幾何的圖像，突顯了辛結構的重要性。非交換値的概念以及取値映射亦皆是超越實數値的泛函的結構。看來像量子力學的物理還是能教我們一些非交換幾何的數學的。

量子力學---我們給出的是算符坐標作爲基本變量的量子力學直觀圖像，用這新的語言去看其理論的詳細內容及其各種實驗狀況的物理可能會得出更好的理解並讓量子科技的應用更強大。

參考資料

[1] O.C.W. Kong and W.-Y. Liu, arXiv: 1903.09071, NCU-HEP-k079.

[2] O.C.W. Kong and W.-Y. Liu, arXiv: 1903.11962, NCU-HEP-k078.

[3] C.S. Chew, O.C.W. Kong and J. Payne, Adv. High Energy Phys. 351, 4395918 (2017).

[4] C.S. Chew, O.C.W. Kong and J. Payne, J. High Energy Phys. Gravit. Cosmo. 5, 553 (2019).

[5] D.N. Cho and O.C.W. Kong, Ann. Phys. 351, 275 (2014).

[6] O.C.W. Kong, Phys. Lett. B 665, 58 (2008).

[7] O.C.W. Kong and J. Payne, Int. J. Theor. Phys. 58, 1803 (2019).

[8] R. Cirelli, A. Mania and L. Pizzocchero, J. Math. Phys. 31, 2891 (1990).

[9] T.A. Schilling, Ph. D dissertation, the Pennsylvania State University, 1996; A.Ashtekar, T.A. Schilling, in On Einstein's Path (ed. A. Harvey), p.23- ,Springer 1998.

[10] U. Leonhardt, Measuring the Quantum State of Light, Cambridge University Press 1997.