

## 非線性偏微分方程式與方程組其解的唯一性 及其多重性質之研究

中央大學數學系 陳建隆

從數學生物學、數學物理、化學等應用學科所引導出的變分結構之極值問題中，經常會對應一個微分方程式或是一系列的微分方程組，因此，透過研究微分方程課題會是連結此類應用科學的一個重要橋樑。這其中，探究微分方程組其對應解的數學結構，如解的存在、唯一性、穩定性及分類性等等基本性質，在數學分析的工具上常常是相當重要且極富挑戰性的研究主題。

近年來，我與我的研究夥伴們發展出有別於單一偏微分方程式上的 Sturm-Liouville 比較定理外之富數學理論的計算工具，透過聯立系統中其解所對應的線性化方程組、解的 Pohozaev 等式之漸進行為及分析學上的算子及延拓理論，推導出對應的「退化性質」(degenerate)或「非退化性質」(non-degenerate)之詳盡相關定理，利用此類重要性質，我們能進一步得到一系列橢圓偏微分方程組：如 Chern-Simons 模型、Maxwell-Chern-Simons 模型等在多重漩渦(multivortex)條件下，其所對應的拓樸解(topological solutions)及給定流量下的相關非拓樸解(non-topological solutions)之存在性與唯一性理論，由此我們更可以刻劃出此類系統模型中極詳盡與完備的所有解之結構性質。同時，運用此處所發展出來的相關理論工具再加上歧異分析學及穩定性理論，我們也獲得在數學生物學中之合作系統模型(Competition Models)狀態下，其所對應的偏微分方程組在一維情況下正解的唯一性與穩定性理論。相關資料請參見參考論文中的[1]、[4-9]與[15]。另一方面，我們也同時對質量守恆條件下，對一反應-擴散方程組在時間平衡狀態下，當擴散係數逼近零時，其最小能量解的極限行為，進而能探究到不穩定性單調行為解存在的可能性(請見參考論文中的[13])。

我們也相信此處所發展出來的深入相關數學理論與工具亦可同時應用於多種的偏微分方程組之探究中，這也是我們未來正在深入的其中一項研究主題。

另一個極具挑戰性的研究課題是有關「奇異點集的幾何性質如何影響到偏微分方程其正解的存在性及多重性質」。

對此，我們分兩種主題來探討：

(A) 首先，我們針對「一個在區域邊界上具有多個奇點的橢圓偏微分方程」其對應正解的存在性與否，作一深入的研究。

在許多著名的研究結果中(如參考論文中的[3]、[4]、[12]與[14])，已廣泛探索在幾種不同的情況下，利用曲率方法的條件來加以證明此類偏微分方程其正解之存在與相關性質。在此研究主題中，我們提出了一個較一般的幾何條件下，以聯繫順序(contact order)的概念來研究方程式其正解存在性的行為估算。這種新的接觸順序數學方法是：利用對分析邊界奇異點集的較詳細幾何接觸特性來進一步探究其對應正解存在的關鍵性條件。我們提供了一種改進的展開估算法，並在許多情況下涵蓋了原先已在使用的曲率方法。這裡一嶄新的獲得成果是：對於之前大家無法證明在凸集定義域(例如球，半球或矩形框)下之正解存在性，我們能夠分別獲得了解答。同時，透過一個不存在性的分析結果，我們進一步說明了：上述所獲得的存在性結果對於某些凸域是最優的條件(optimal condition)。這種類型的最優性在之前文獻中較少涉及。進而，我們也將上述結果推廣，證明了 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式在維度是 3 的情況下，其最佳常數(Best Constant)之極小化子(minimizer)的存在性，這也解決了之前方程學者們的研究猜測。詳細的內容可參見參

考論文中的[11]。

(B) 另外，我們研究「動態哈地型態奇異勢的熱偏微分方程式」(Heat Equation with a Dynamic Hardy-type potential)。

我們特別感興趣於奇異點集隨時間移動的情況下，在適當的奇異勢和初始值條件下，此熱方程其解的存在性、不存在和唯一性，我們同時探究解在奇異點集附近的詳盡上下界估算。通過對徑向熱方程的研究計算、等效積分方程的精確估計以及比較原理，我們進而得到：隨著時間移動的奇異點集如何影響熱方程其解的詳細行為與性質。相關資料可參見參考論文中的[2]、[10]與[16]。

### 參考論文

- [1] An, Y., Chern, Jann-Long and Shi, J., Uniqueness of positive solutions to some coupled cooperative variational elliptic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 370 (2018), no. 7, 5209–5243.
- [2] P. Baras and J. Goldstein, The heat equation with a singular potential. *Trans. Amer. Math. Soc.* 284 (1984), 121–139.
- [3] Caffarelli, L., Kohn, R. and Nirenberg, L., First order interpolation inequalities with weights. *Composit. Math.* 53(3), 259–275 (1984)
- [4] Chen, C. and Lin, C., Local behavior of singular positive solutions of semilinear elliptic equations with Sobolev exponent. *Duke Math. J.* 78(2), 315–334 (1995).
- [5] Chen, Z. and Chern, Jann-Long, The analysis of solutions for Maxwell-Chern-Simons O(3) sigma model. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 58 (2019), no. 4, Paper No. 147, 27 pp. 35J47
- [6] Chen, Z. and Jann-Long Chern, Topological multivortex solutions for the Chern-Simons system with two Higgs particles. *Comm. Partial Differential Equations* 41 (2016), no. 4, 705–731.
- [7] Chen, Z. and Chern, Jann-Long, Uniqueness of topological multivortex solutions in the Maxwell-Chern-Simons model. *J. Funct. Anal.* 270 (2016), no. 6, 2073–2125.
- [8] Chern, Jann-Long, Chen, Z. and Yang S., A classification of semilocal vortices in a Chern-Simons theory. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 33 (2016), no. 2, 575–595.
- [9] Chern, Jann-Long and Chen, Z., Lin, C., Uniqueness of topological solutions and the structure of solutions for the Chern-Simons system with two Higgs particles. *Comm. Math. Phys.* 296 (2010), no. 2, 323–351.
- [10] Chern, Jann-Long Chern, Hwang, G, Takahashi, J. and Yanagida E., On the heat equation with a dynamic Hardy-type potential, Submitted, 2020.
- [11] Chern, Jann-Long Chern, Fang, X. and Hsia, C., On Elliptic Equations of Hardy-Sobolev Type with Multiple Boundary Singularities and Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequality, Preprint, 2020.
- [12] Chern, Jann-Long and Lin, C., Minimizers of Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with the singularity on the boundary. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 2, 401–432.
- [13] Chern, Jann-Long, Mortia, M and Shieh, T., Asymptotic behavior of equilibrium states of reaction-diffusion systems with mass conservation. *J. Diff. Eqs* 264 (2018), no. 2, 550–574.
- [14] Ghoussoub, N. and Robert, F., The effect of curvature on the best constant in the Hardy–Sobolev inequalities. *Geom. Funct. Anal.* 16(6), 1201–1245 (2006).
- [15] Han, Xiaosen; Lin, C. and Yang, Y., Resolution of Chern-Simons-Higgs vortex equations. *Comm. Math. Phys.* 343 (2016), no. 2, 701–724.
- [16] Vancostenoble, J. and Zuazua E., Null controlability for the heat equation with singular inverse-square potentials. *J. Funct. Anal.* 254 (2008), 1864–1902.