

衍生性金融商品研究的 回顧及展望

張森林*

一、前言

衍生性金融商品研究(derivatives research)是財務研究領域重要的一環，整個研究領域重要的突破是從Black and Scholes (1973)確立了無套利訂價理論(no-arbitrage pricing theory)及風險中立評價(risk-neutral valuation)的重要觀念，爾後隨著衍生性金融商品市場的蓬勃發展以及各種模型的延伸，衍生性金融商品研究也日新月異，相關的學術論文陸續發表而進入了百家爭鳴的時代，由於整個衍生性金融商品研究相當龐雜，本文一方面回顧過去衍生性金融商品重要的研究領域及方向，同時並討論探索未來可能重要的研究方向及議題。

二、模型擴展及不同型態選擇權的定價

首先，眾多的文獻中主要是將Black and Scholes(1973)模型加以延伸及擴展，例如：Black and Scholes (1973)模型中假設資產價格遵循幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，但現實世界底下資產價格的隨機過程並非遵循幾何布朗運動，因此有相當多的文章嘗試提出一些更合理的隨機過程來描述資產價格的走勢，文獻中重要的隨機過程模型包括Cox(1975)的Constant Elasticity of Variance (CEV)模型、Merton (1976)的擴散跳躍模型(jump-diffusion model)、Rubinstein (1985)的displaced lognormal model、Heston (1993)的隨機波動模型(stochastic volatility model)、Duan (1994)的GARCH option pricing model、Camara (2002)的transformed normal model與Kou (2004)的double exponential jump diffusion model等等，這些模型都嘗試提出更能描

* 作者為國立臺灣大學財務金融系教授

述資產價格的隨機過程或分配，那麼何謂比較好的隨機過程或統計分配來描述資產價格呢？一般當然都是訴諸過去的歷史價格資料，例如：一般認為股票價格的分配都具有厚尾(fat-tailed)及右偏(negative skewed)的特性，上述相當多的模型都能夠產生厚尾及右偏分配的特性，例如Heston (1993)的隨機波動模型。而在匯率方面一般都發現匯率大都具有厚尾分配的特性，而其偏態(skewness)係數則接近零。雖然目前已有眾多的隨機過程及統計分配模型被介紹到衍生性金融商品的定價上，但因為隨機過程及統計分配模型數量相當眾多，因此仍然有可能發現更好的隨機過程模型存在，對具有數學及統計背景的財務學者，仍然可以嘗試找出更好的模型加以介紹，應用到衍生性金融商品的定價，因此這個研究方向的研究議題仍然持續大有可為。

其次，Black and Scholes (1973)只針對歐式選擇權(European option)進行評價，而實際在市場上交易的選擇權種類繁多，因此有部分的文獻即針對歐式之外的其他選擇權加以定價。在眾多的衍生性金融商品中，文獻上最廣泛探討的包括美式選擇權(American option)及奇異式選擇權(exotic option)，其中重要的奇異式選擇權又包括：障礙式選擇權(barrier option)、亞洲式選擇權(Asia option)、回溯式選擇權(lookback option)及多資產選擇權(option on multiple assets)等。首先就美式選擇權的定價而言，由於美式選擇權具有隨時可以提前履約的特質，在處理選擇權價格的計算時必須同時決定提前履約的界線(early exercise boundary)，文獻上稱之為free boundary problem (請見McKean (1965))，因此其定價相當的困難，文獻上提出了相當多的數值方法(numerical method)以及近似解的方法來求算美式選擇權的價格，例如：Barone-Adesi and Whaley (1987)假設提前履約權利金(early exercise premium；意即美式選擇權價格超過歐式選擇權價格的部分)的部分遵循常微分方程(ordinary differential equation)，然後再求解常微分方程因而導出美式選擇權價格的分析解(analytical solution)，又例如：Geske and Johnson (1984)利用歐式選擇權及一系列的百慕達式選擇權(Bermudan options)的價格來外插求解美式選擇權的價格，由於百慕達式選擇權只允許選擇權的持有者在有限的時點中選擇一個時點提前履約，因此其定價相對簡單許多，配合上外插之後也可以得到相當精確的美式選擇權價格。另一類的文獻則是導出early exercise premium的積分公式(integral representation formula，請參見Kim (1990)，Jacka (1991)，及Carr, Jarrow, and Myneni (1992)等)。因為美

式選擇權的定價相當困難，所以往往只要提出一些簡單巧妙的方法就能夠完成一篇有價值的學術論文，例如：如何處理early exercise boundary，有些學者假設early exercise boundary 遵循指數函數(exponential function)，然後求解出相當精確的美式選擇權價格近似值（或下限）¹，又例如作者本身也嘗試改良外插法，建議採用repeated Richardson extrapolation formula；²也嘗試將Geske and Johnson (1984)的方法加以延伸，建議採用不同的選擇權價格(perpetual Bermudan option prices)來外插美式選擇權價格。³因此只要熟讀文獻然後再將文獻中的方法加以改良，或者嘗試挑戰文獻中不合理的假設加以修正，往往就能夠找出一個有趣的研究議題，因此本人覺得美式選擇權的定價問題將是一個持續有趣的研究議題，有興趣的讀者還是可以找到有趣的研究議題及方向加以切入，例如：利用數值方法計算出來的美式選擇權價格，是否會收斂到真實價格以及收斂的速度(rate of convergence)等問題，仍有待進一步的研究。⁴

障礙式選擇權是奇異式選擇權中最常被評價的選擇權之一，其困難點在於如何處理標的資產價格何時會碰觸到障礙價格以及碰觸到障礙價格的機率，也就是所謂的first passage time density的問題，在Black and Scholes模型的架構下，連續觀察資產價格是否有碰觸到障礙價格的障礙式選擇權(continuously monitored barrier option)的定價反而比較容易，因為在這個情況底下first passage time density是已知的，反倒是離散型的障礙式選擇權(discretely monitored barrier option)的定價就顯得比較困難了。舉例而言，如果是一個一年期的障礙式選擇權，每一個月觀察一次標的資產價格是否碰觸到障礙價格，這樣一個選擇權的定價問題，事實上會牽涉到一個12維度的積分問題，因此一般都用數值方法來處理，例如：以二項樹模型(binomial tree model)來定價障礙式選擇權。文獻上有很多ad hoc的發現十分有趣，例如：

¹ 因為真正的early exercise boundary並非指數函數，假設early exercise boundary是指數函數，將造成提前履約的決策並非最佳化而降低選擇權的價值，因此推導出的近似解會是美式選擇權價格的下限。

² 請參見Chang, Chung, and Stapleton (2007).

³ 請參見Chung and Shackleton (2007).

⁴ 例如Amin and Khanna (1994)證明了利用二項樹模型計算美式選擇權價格時，二項樹模型價格會收斂到真實價格，但收斂的速度則未證明。

Boyle and Lau (1994)及Ritchken (1995)都發現，應該讓二項樹或三項樹的某一層節點的價格等於障礙價格，如此評價出來的障礙式選擇權價格會比較精確。雖然文獻上對於障礙式選擇權價格的討論已經很多了，但仍然有一些盲點值得讀者去思考與釐清，例如：上述文獻認為採用二項樹或三項樹來評價障礙式選擇權時，應該使某一層的節點價格落在障礙價格上，但是這樣的經驗法則事實上只適用於連續觀察型的障礙式選擇權，對於離散觀察型的障礙式價格選擇權並不見得適用，作者認為這個問題仍然值得投入時間去研究。又例如利用數值方法去評價離散型的障礙式選擇權時，數值結果計算出來的價格，是否會收斂到真實價格以及收斂的速度等問題也值得進一步探討。⁵

另一類被廣泛研究的奇異式選擇權是亞洲式選擇權，亞洲式選擇權的特色在於選擇權的報酬函數決定於平均標的資產價格，計算平均價格的方式通常有兩種，一種是利用幾何平均 (geometric average)，另外一種則是算數平均 (arithmetic average)，平均價格本身可以作為選擇權的執行價也可作為標的資產價格，因此文獻上又分成average strike及average price兩大類。亞洲式選擇權定價的困難點在於如果是算數平均的亞洲式選擇權，即使在簡單的Black and Scholes模型下，我們仍然無法知道算數平均價格的統計分配為何。由於平均價格的統計分配特性不知道，因此目前文獻上較缺乏討論與證明數值方法評價亞洲式選擇權時的收斂問題及收斂速度等，類似的研究議題仍有待數理背景強的學者去突破。

另外文獻上也有一些選擇權的報酬函數是決定於多個資產的價格，這類奇異式選擇權的定價通常也比較困難，因為牽涉到多個資產價格的統計分配，因此往往沒有辦法推導出封閉式解或分析解⁶，因此只能訴諸數值方法，如果是歐式的多資產價格選擇權，其評價相對容易，最簡單的方式就是利用蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo simulation method)來處理，但如果要評價美式的多資產價格選擇權，就必須將美式選擇權定價文獻上的方法及其特性運用到這個定價問題來處理，目前文獻上雖然有一些方法可以處理這個問題，但都還有一些缺點，如何比較完善的處理這個問題仍然值得後續研究。

⁵ Chung and Shih (2007)討論了利用三項樹模型去評價連續型的障礙式選擇權時，三項樹模型計算出來的價格收斂到真實價格的收斂速度。

⁶ 即使有封閉式解或分析解，計算往往也牽涉到高維度的積分問題。

三、選擇權定價的數值方法

衍生性金融商品研究的另外一支是關於數值方法的部分，在比較各種數值方法時，計算的時間、精確度及彈性（也就是可以評價的衍生性金融商品種類的多寡）是最重要的考量點，最好的數值方法當然是計算速度又快又精確而且可以評價各式各樣的衍生性金融商品，當然這是不可能達到的目標(mission impossible)，因此也就有各式各樣方法發展的空間。目前常見的數值方法可以分為三大類，首先是所謂的樹狀圖法(lattice approach)，樹狀圖法被應用在衍生性金融商品的評價可以追溯到Cox, Ross, and Rubinstein (1979)的二項樹模型，這類方法的最大優點在於簡單容易瞭解、電腦程式容易撰寫、可以處理提前履約的問題（例如評價美式選擇權及可轉換公司債等），因此後續的研究相當多，例如：部份的研究探討如何微調二項樹或三項樹使其計算出來的選擇權價格更為精確，部份的文獻則探討樹狀圖法收斂速度的問題。樹狀圖法最大的缺點是難以處理多資產選擇權的定價，當資產個數增加時，樹狀圖法所需的計算時間會成幾何速度的增長，因此要處理含五個標的資產以上的選擇權定價時，幾乎不可能用樹狀圖法。雖然如此，還是有一些學者嘗試將樹狀圖法拓展到多資產選擇權價格的評價，也得到了相當不錯的結果。另外樹狀圖法也比較難以處理路徑相依的選擇權(path dependent options)，文獻上有一些文章討論如何將標的資產價格的路徑函數(path function)放入二項樹模型或三項樹模型中，使其可以評價路徑相依的選擇權，不過這些方法都相當複雜，而且計算時間也太長。作者認為，發展有效率的樹狀圖法來評價多資產選擇權及路徑相依選擇權，仍是有待突破的重要課題。

第二種常用的數值方法則是有限差分法(finite difference method)，有限差分法在工程數學中早已被廣泛運用在解偏微分方程(partial differential equation)，因此這個方法的發展歷史其實已經相當久了，財務領域的相關學術文章大都只是將既有的結果應用過來罷了，當然有些比較特別的衍生性金融商品的評價還是需要巧思去處理，例如：路徑相依的選擇權或多資產選擇權的評價，如果要採用有限差分法時，仍然需要克服一些維度的問題或處理路徑函數的問題，所以這部分的研究議題仍然有值得開拓的地方。

第三類常用的數值方法則是蒙地卡羅模擬法，蒙地卡羅模擬法也是發展歷史悠久的一個方法，在數學上經常被廣泛運用於求算期望值或積分的問

題。蒙地卡羅模擬法最大的優點就是可以處理多資產選擇權的定價問題，其計算時間和資產的個數是線性的關係，因此相較於上述的樹狀圖法，當標的資產個數相當多時，其計算時間將大幅的減少，例如：如果選擇權的標的資產有10個或更多時，只有蒙地卡羅模擬法可以處理這樣的選擇權定價問題。蒙地卡羅模擬法討論的重點在於如何產生亂數以及如何降低選擇權價格估計值的變異數（也就是所謂的variance reduction method）。在亂數產生的部分常用的方法有所謂的pseudo random number generation，例如利用電腦時鐘來產生i.i.d.的隨機變數；另一種方法則是所謂的quasi random number，quasi random number的隨機性比較差，這些隨機變數並不是真正的隨機變數，而是利用一些數學法則決定出來的隨機變數，例如：用2、3、5等質數去產生隨機系列的變數，quasi random number的好處在於所產生的隨機變數序列的分配均勻性較佳，所謂分配均勻性簡而言之就是理論上應該出現的次數和實際出現次數的差異(discrepancy)，例如從標準常態分配中抽出10個樣本，這10個樣本中小於或等於零的個數理論上應該有五個，但實際上如果真的採用隨機抽樣的話也許只有2、3個，甚至只有1個或0個，但如果採用quasi random number generation，所產生的序列中小於或等於零的個數就會相當接近5個。當然quasi random number也有它的缺點，詳細的細節並非作者在這裡可以交代清楚的，有興趣的讀者（尤其是數理背景強的學者）值得花時間去探索這個議題，也許會有意想不到的收穫。另外一大類的研究則在探討如何降低蒙地卡羅估計值的變異數，在傳統數學中已經有相當多的方法被提出來，例如：common random numbers, antithetic variates, control variates, importance sampling及stratified sampling等。對作者而言這個議題的有趣性在於：對於各式各樣不同的衍生性金融商品而言，相對應最好的variance reduction method其實並不盡相同，因此如果能夠找出其法則及重要的衍生性金融商品所對應的最佳variance reduction method應該是很有貢獻的。最後，蒙地卡羅模擬法最近的研究方向則是將它改良運用在處理提前履約的問題，傳統上認為蒙地卡羅模擬法無法處理美式選擇權的評價，因為蒙地卡羅模擬法是一種forward looking的方法，無法決定何時應提前履約的問題。⁷近年來

⁷ 也就是在模擬的過程中如果美式選擇權已經深度價內(deep in-the-money)了，那麼是否應該提前履約或繼續持有該選擇權呢？

文獻上已經有所突破，各式各樣的技巧被提出來處理提前履約決策的問題，很多的數學技巧都被提出來，但綜合而言，這些方法都只能夠找出美式選擇權價格的上限跟下限，差別只是在於好的蒙地卡羅模擬法所計算出來的美式選擇權價格的上下限相當接近，因此真實值也就被限定在一個很小的範圍內。相關的研究議題仍值得探索，例如：多資產美式選擇權的提前履約決策問題仍然有待進一步的分析與研究。

四、不同標的資產選擇權的定價及研究

按照標的資產的特性，衍生性金融商品的研究又可以區分為利率、股票、外匯、信用及商品等。就利率衍生性金融商品(interest rate derivatives)的評價部分，最重要的部分是利率期限結構模型的部分，利率期限結構模型決定了長天期及短天期利率（也就是殖利率）的關係，也決定了未來利率的走勢及可能變化的情況，常見的利率結構模型中，模型的變數可能是瞬間短期利率(instantaneous short rate)、遠期利率(forward rate)、零息債券價格(zero-coupon bond price)或者是LIBOR rate，就模型的特性又可分為一般均衡模型及無套利模型。目前最常被廣泛運用在利率衍生性金融商品定價的就是所謂的market model，也就是利用LIBOR rate當作利率模型的變數。在這個研究議題中，常常必須在現實與理想中做一個取舍，理想上一個好的利率期限結構模型，必須能夠描述不同天期利率的變化及走勢，利率的波動性也可能並非常數，因此可能需要一個多因子的複雜模型才能夠適當的描述殖利率曲線的變化，然而在現實上如果採用這麼複雜的利率期限結構模型，大部分的利率衍生性金融商品都將相當難以定價。當然這也跟數值方法的進步與發展有關，如果有強而有力的數值方法做後盾，那麼就可以考慮採用比較複雜的利率期限結構模型，因為利率衍生性金融商品是一個龐大的市場，相關的研究主題仍然會得到國際期刊的青睞。兼具模型推導、數值方法及程式撰寫能力的學者，可以嘗試採用複雜的利率模型來訂價利率衍生性金融商品，這方面的研究仍然具有學術貢獻。

股票相關的衍生性金融商品(equity derivatives)是另外一類重要的衍生性金融商品，例如最常被廣泛研究的S&P 500指數選擇權就屬於其中一種，當然個股選擇權也是市場上廣泛被交易的重要衍生性金融商品之一。這個研究領域中好的股價模型是很重要的，早期的Black and Scholes模型已經被眾多

的實證研究推翻，不適用於描述股價的隨機動態過程，如果要從事相關的 연구，對於重要的股價模型必須要熟悉，例如目前常用的stochastic volatility (SV) model或是stochastic volatility price jump (SVJ) model等，都必須要能夠有能力推導在這些模型下衍生性金融商品的價格。此外，由於個股選擇權大部分都是美式的，因此也要了解如何採用數值方法來處理美式選擇權的定價。雖然既有的研究已經很多，但是股票衍生性金融商品的研究仍然陸續被探討，以現在財務研究的要求跟趨勢而言，能夠考慮更多因素的情況下，對於股票選擇權定價的影響仍然是值得嘗試的方向，例如：考慮系統風險（也就是beta）、流動性風險、甚至是投資人的情緒(Investor sentiment)等因素對於股票選擇權定價的影響，都是最近在頂尖期刊發表的重要議題。

就外匯衍生金融商品(currency derivatives)部分，探討的主題包括外匯選擇權的定價、實證探討模型的配適問題、交叉匯率選擇權(cross-rate option)的處理、兩國無風險利率對外匯選擇權定價的影響等，都是重要的研究議題。在這個研究領域中實證研究的部分相對困難性比較高，因為大部分的外匯選擇權都是店頭市場的產品，選擇權的價格資料相對比較少，目前的研究也忽略了店頭市場交易中外匯選擇權本身的流動性，以及外匯現貨本身的流動性對於選擇權價格的影響，如果能夠將流動性風險或是國家信用評等風險納入外匯選擇權的定價，將是很重要的研究議題。

此外，最近很熱門的衍生性金融商品之一，是所謂的信用衍生性金融商品(credit derivatives)，這當然是和BASEL II規範了銀行必須報告本身的信用風險暴露部位有關，因此信用風險的管理在近幾年顯得相當重要，連帶促使信用衍生性金融商品市場的發展。這個研究領域中信用風險模型當然是最重要的，常見的信用風險模型有所謂的reduced form models（通常直接假設違約的隨機過程，例如Duffie and Singleton (1999) model）以及structural form models（通常假設公司價值的隨機過程並設定破產條件，例如Merton(1974) model），一般認為reduced form models比較適用於信用衍生性金融商品的定價，因為這類模型不需要考慮和公司資本結構是否吻合，可以直接去配適(fit)公司債的殖利率，然後再用以定價信用衍生性金融商品，所以大部分的實證研究都發現reduced form models所計算出來的信用衍生性金融商品的價格比較接近市價，相對的structural form models就比較適用於違約機率(default probability)的預測以及違約發生時回收率(recovery rate)問題的處理。由於信

用衍生性金融商品相對是比較新的產品，所以目前這個研究領域仍處於百家爭鳴的狀態，其中一個重要的研究議題是實證比較各種信用風險模型，以探討各個模型在公司破產機率的預測及信用衍生性金融商品評價的精確性問題，而且除了採用信用衍生性金融商品的價格資料之外，標的公司股價及個股選擇權的價格資料⁸，可能都可以拿來驗證各個模型的優缺點以及模型理論價格和市場價格資料相符的程度。

此外，商品衍生性金融商品(commodity derivatives)也是重要的衍生性金融商品之一，尤其是最近石油、原物料及貴重金屬的價格都有相當大的漲勢或波動時，商品衍生性金融商品市場顯然更加重要。由於各種商品價格的特性不同，因此針對不同的商品衍生性金融商品需要採行不同的標的資產價格模型，例如：電價跟原油價格常被認為有季節性的供需影響，而電價還有尖峰跟離峰時間差別定價的問題，這類的研究議題還需要了解相關商品的特性才能找出適當的標的資產價格模型，因此這個領域可能適合跨領域的合作。

五、衍生性金融商品的實證研究

衍生性金融商品的實證研究(empirical derivatives research)近年來也蓬勃發展，從早期探討Black-Scholes模型下隱含波動率(implied volatility)的資訊內涵開始，現在衍生性金融商品實證研究所探討的議題可說是五花八門，例如：現貨及期貨價格的領先落後關係的探討、利用選擇權價格來萃取風險中立機率密函數(risk-neutral density function)及預測未來的股價、Jiang and Tian (2005)計算model-free的隱含波動率並檢驗其資訊內涵，Bliss and Panigirtzoglou (2004)利用股價指數選擇權的價格資料來估計投資人的風險趨避係數等。以現在財務領域頂尖期刊的偏好而言，如果一篇文章能夠兼具理論模型與實證結果的貢獻，是比較可能被接受發表。由於兼具理論模型及實證研究能力的學者相對比較少，所以有意朝此方向努力的學者應該找尋好的合作夥伴來互相合作，以發揮彼此的專長。

⁸ 在structural form models中，標的公司股票事實上等同於股東持有對於公司價值的買權，其執行價為公司負債總額，在公司債到期時，若公司價值低於公司負債總額，則股東不會執行買權而讓公司倒閉，反之則執行買權而取得償還負債後的剩餘價值。因此股價及個股選擇權的價格資料都可以用來估計structural form的信用風險模型參數。

選擇權價格資料的取得及資料庫的正確性與完整性，是攸關實證研究成功與否的重要因素，目前用得最多的選擇權價格資料庫應該是OptionMetrics，OptionMetrics的資料可回溯至1996年，惟缺乏日內資料(tick data)，其少數資料的正確性也需要加以注意篩選。最近CBOE也開始販賣選擇權價格資料，還包括日內資料，因此資料的完整性跟正確性應該是相當的好，只是價格相當的昂貴，經費充裕的學校或學者可以考慮購買CBOE的選擇權價格資料，應該有機會探討更多重要的實證研究議題。

六、結語

根據陳聖賢教授等人「管理一學門熱門及前瞻學術研究議題調查報告」的研究結果顯示，衍生性金融商品研究在7個財務類頂尖期刊⁹中佔的比例大概只有9%，相較於「公司財務」(30%)及「金融機構」(25%)兩個研究領域，其比例確實偏低，因此若能將衍生性金融商品研究的方法結合運用到其他領域，對於發表在財務類頂尖期刊會很有幫助，關於衍生性金融商品可能的研究方向及與其他領域的跨領域結合研究方向，可參考陳聖賢教授等人的研究報告。

最後，不論是創新的研究議題或只是過去研究的延伸，持續深耕自己的研究主題並不斷改善文章的品質才是最重要的。即便是創新前瞻的研究主題，如果不能完美地執行整個研究和寫作，最終還是很難成功地發表，願與所有學者共勉之！

⁹ 這7個期刊名稱如下：*Journal of Finance*, *Journal of Financial Economics*, *Review of Financial Studies*, *Journal of Business*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *Journal of Banking and Finance*, *Financial Management*。