[研究成果報導]

均曲率流

台灣大學數學系 蔡忠潤

一、極小子流形

關於極小子流形(minimal submanifold)的研究已經有超過一百年的歷史，其中一個起源來自於肥皂泡面研究。在一個黎曼流形中的子流形，可以考慮其體積；而沿著不同法方向形變該子流形，體積也會跟著變化。而一個極小子流形就是體積變分為零的點。體積泛函沿著法方向 V 的變分如下：

$$\delta_V \mathrm{Vol} = -\int \langle V, H \rangle d\mu.$$

其中 H 是所謂的平均曲率(mean curvature vector)，是一個特殊的法向量場。上述變分式告訴我們：如果平均曲率並非處處為零，我們可以形變該子流形，使其體積變小。而平均曲率全為零的子流形便稱做極小子流形。

粗略來說，一個動機是，極小子流形是‘最佳的’子流形，然後我們可以透過研究一個黎曼流形中的子流形、來對該流形幾何與拓樸性質有更深刻的理解。比方說 Schoen—Yau [3]對於三維流形的工作就是一個很好的例子。

二、均曲率流

然而在一般的情況下，極小子流形的存在性是困難的問題。一個自然的想法如下：基於上述一階變分式，我們可以將平均曲率 H 理解為體積的負梯度(negative gradient)；因此，若沿著 H 的方向將子流形做形變，其過程會讓體積不斷變小，最後可以期望它變成一個極小子流形。

其嚴格的數學理論即均曲率流(mean curvature flow)，有系統的研究由 Huisken [2]開始。均曲率流為拋物型方程，所以具有短時間的存在性。但因為其帶有非線性項，當演化時間稍長時，這些非線性項的影響會變得重要，所以不必然有長時間的存在性。

Huisken 在[2]的一個主要定理是說，奇異點(singularity)發生的充分必要條件，是形狀算子(shape operator)的失控。其論證主要使用 blow-up 分析。形狀算子是一個子流形的二階微分量，此定理的要點是給出了一個簡明的幾何準則來判斷奇異點。

Huisken 在[2]的另一個重要的定理可以說是給出了奇異點發生的一個例子：對歐式空間中凸的超曲面(convex hypersurface)做均曲率流，奇異點必然發生，而且在 blow-up 之下，均曲率流會越來越接近圓球殼。這個方向 Huisken 之後和其合作者 Sinestrari、Brendle 等有做進一步推廣，放寬凸性的條件，進而得到一些幾何與拓樸的聯繫。這是均曲率流奇異點研究的一個重要應用；可以參見 [1] 和該文內的文獻。

三、穩定性

另一個均曲率流的研究方向是穩定性(stability)問題，這可以視為奇異點的反方向現象。一般的問題是，在什麼情況下，均曲率流會長時間存在、並收斂到一個極小子流形。這個一般的問題目前所知道非常少。在幾何條件都是解析(analytic)時，Simon [4]關於梯度流的定理給出了答案。在不假設解析的條件下，通常需要假設子流形是圖形式(graphical)的，像是王慕道教授的結果[8]。

在我和王慕道教授的合作工作[6, 7]中，我們對於均曲率流的局部穩定性問題給出了一個有系統的答案。因為極小子流形是體積泛函的臨界點，要研究體積泛函的局部行為，自然會去分析體積泛函的二階變分。此二階變分由 Simons [5]首先做了仔細的分析。其相應的雅可比算子(Jacobi operator)有兩部分：一個非負的二階微分算子，以及一個涉及全空間曲率和子流行形狀算

子的零階算子構成。雅可比算子為正算子亦即一般線性意義下的穩定。

一個有趣的問題就是線性的穩定性和均曲率流的穩定性之關聯。我們發現如果雅可比算子的零階部分已經是正定，會導致距該子流形的距離函數之凸性；這觀察有兩個應用。一、該子流形局部有其維度以上的剛性。二、在均曲率流演化下，距離函數是遞減的；透過進一步的分析，我們證明該子流形的一階擾動對於均曲率流是穩定的。讀者可以和之前提及的 Huisken 奇異點刻劃相比較，基本上一階擾動是最佳的條件。

一個上述定理的應用是關於特殊和樂群(special holonomy)的幾何。在這類幾何中，有所謂被校準(calibrated)子流形。它們不僅僅是極小子流形，而是體積泛函的極小態。這種幾何是現今微分幾何的主軸之一，它們也出現在理論物理中。上述的穩定性條件，在這種情況下，可以翻譯成子流形本身(intrinsic)的幾何性質。這提供了另一個研究被校準子流形的可能切入點。

參考文獻

[1] S. Brendle and G. Huisken, *Mean curvature flow with surgery of mean convex surfaces in three-manifolds*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), no. 9, 2239-2257.

[2] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 237-266.

[3] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 127-142.

[4] L. Simon, Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems. Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 3, 525-571.

[5] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*. Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.

[6] C.-J. Tsai and M.-T. Wang, *Mean curvature flows in manifolds of special holonomy*. J. Differential Geom. **108** (2018), no. 3, 531-569.

[7] C.-J. Tsai and M.-T. Wang, *A strong stability condition on minimal submanifolds and its implications*. to appear in J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal).

[8] M.-T. Wang, Long-time existence and convergence of graphic mean curvature flow in arbitrary codimension. Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 525-543.