正特徵值上的克羅內克極限公式

國立清華大學數學系　魏福村

一、起源

整個故事開始於瞭解黎曼 zeta 函數

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{ ，}$$

在 s=1 附近的洛朗(Laurant)級數展開：

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\cdots\text{ ，}$$

其中

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

是所謂的尤拉(Euler)常數。目前我們對尤拉常數的了解還是非常侷限。然而，考慮伽瑪(gamma)函數

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$$

其於 s=1 的泰勒(Taylor)展開：

$$\Gamma(s)=1-\gamma(s-1)+\cdots\text{ 。}$$

利用 zeta 函數的函數方程(functional equation)：

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\xi(s)=\xi(1-s)\text{，}$$

我們可以得到

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=\ln 2\pi\text{ 。}$$

上面的等式給予 zeta 函數在 s = 0 的對數微分值一個幾何量的解釋：***單位圓的周長取對數***。本篇文章目的便是介紹在高維度空間中所出現的類似現象：克羅內克(Kronecker)極限公式。

二、古典克羅內克極限公式

給定一複數點$z\in\mathbb{C}$其虛部$Im(z)>0$。考慮所謂的艾森斯坦(Eisenstein)級數：

$$E(z,s)=\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ c^2+d^2>0}}\frac{Im(z)^s}{|cz+d|^{2s}}\text{ ，}$$

我們可以將此級數看成黎曼 zeta 函數於二維複數平面上的推廣。利用艾森斯坦級數的函數方程(參考[5])：

$$\pi^{-s}\Gamma(s)E(z,s)=\tilde{E}(z,s)=\tilde{E}(z,1-s)\text{，}$$

古典的克羅內克極限公式可以寫成：

$$\frac{E'(z,0)}{E(z,0)}=\ln\left(Im(z)|\Delta(z)|^{\frac{1}{6}}\right)\text{，}$$

其中$\Delta(z)$是模判別式函數(modular discriminant function)。

此公式可以視爲前面關於 zeta 函數所含的現象於二維空間中發生的狀況：令$\mathcal{E}_z$爲一「單位」*橢圓曲線*（即其模判別式值爲 1）且其週期爲在$\mathbb{C}$裡格子點$\mathbb{Z}z+\mathbb{Z}$的倍數。則$E(z,s)$在 s = 0 的對數微分值就等於$\mathcal{E}_z$***的面積取對數***。

三、相關應用和發展

1. 希格爾(Siegel) [5]利用克羅內克極限公式裡帶入 z 爲一些二次虛體擴張的點，給出了皮奧(Pell)方程的「模」通解。
2. 同樣的手法，柯爾曼茲(Colmez) [2]透過此極限公式將“CM”橢圓曲線的法爾廷斯(Faltings)高度用對應的 L-函數在 s = 0 的對數微分值來解釋，並提出在高維度阿貝爾區體(Abelian variety)情況下的猜想。

3. 藉由艾森斯坦級數和 L-函數的關係，貝林森(Beilinson) [1]利用克羅內克極限公式將L-函數的特殊值用複數上半平面的絕對「模單位」(Mouldar unit)取對數來表示，並提供模曲線 L-函數的一個「class 個數公式」。透過在模曲線上發現到的現象，Beilinson 提出了更一般高維度曲體上的猜想。
4. 在維度大於 2 的情況下，目前已知的結果爲華盛頓州立大學的劉昇吉教授[4]在全實體(totally real field)上的結果。然而，因爲在維度更高的情況下並沒有好的複數結構，所以對於艾森斯坦級數的對數微分值並沒有一個很好的「週期」解釋。筆者認爲這問題也是解決高維度的柯爾曼茲和貝林森猜想的關鍵之一。

四、正特徵值上的平行結果

給定一個數爲q的有限體$\mathbb{F}$，我們令$A=\mathbb{F}[t]$（係數在$\mathbb{F}$的單變數t多項式環）、$K=\mathbb{F}(t)$（係數在$\mathbb{F}$的單變數t有理函數體）、和$K_\infty=\mathbb{F}((t^{-1}))$（係數在$\mathbb{F}$的單變數$t^{-1}$洛朗級數體）。令$\mathbb{C}_\infty$爲$K_\infty$的一個代數封閉取完備化，我們可以將$(A,K,K_\infty,\mathbb{C}_\infty)$視作古典$(\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C})$在正特徵值世界中的類比。透過此類比，在正特徵值世界裡可以發展許多平行於古典數論裡的理論，甚至利用函數體與幾何的關係走得更遠和看到更多的現象。透過在正特徵值上的進展，可以嘗試回頭以更高的觀點試圖解決古典數論裡無法突破的問題。因此正特徵值世界裡的進展一直是數論裡非常受到矚目的方向之一。

筆者最近研究上的結果[6]便是得到了正特徵值上的克羅內克極限公式。我們可以考慮德林費(Drinfeld)半平面

$$\mathfrak{H}=\mathbb{C}_\infty-K_\infty，$$

利用同樣方式可以定義$\mathfrak{H}$上的艾森斯坦級數。筆者推導出下列等式：

$$\frac{E'(z,0)}{E(z,0)}=\ln\left(Im(z)|\Delta(z)|^{\frac{2}{q^2-1}}\right)，$$

其中這裡的$\Delta(z)$爲$\mathfrak{H}$上的德林費判別函數(Drinfeld discriminant function)。

在正特徵值的發展裡，艾森斯坦級數和德林費判別式函數的關係最早是由德國數學家格克勒(Gekeler) [3]所發現的。但是一直以來並沒有一個好的定義與詮釋方式。筆者建立了此艾森斯坦級數與「自守型式」(automorphic form)的自然關係，進而導出非常平行的結果。

透過此公式，我們也可以得到平行於古典的應用，像是希格爾對皮奧方程的模通解，德林費模上的柯爾曼茲公式，以及函數體上 L-函數的特殊值公式等。

五、高維度的突破與展望

相較於古典的情況，正特徵值上高維度有比較好的幾何結構：德林費週期區域(Drinfeld period domain)。筆者最近的突破便是推廣正特徵值裡二維的克羅內克公式到任意維度上，因而得到任意稚的德林費模上的柯爾曼茲公式。除此之外，利用高維度艾森斯坦級數和自守型式的關係，我們對此極限公式可以有一個非常一般的「艾戴爾化」(adelic)詮釋，並藉此得到了自守 L-函數上特殊值的公式。

利用此高維度上的結果，可以觀察到許多古典裡看不到的現象。例如可以考慮四維艾森斯坦級數和格林函數的關係，藉由導出的克羅內克極限公式來連結 L-函數和幾何上「相交點個數」(intersection number)的關係（參考[7]），並探討正特徵值上高維度的庫德拉(Kudla)綱領。這些是筆者未來研究發展的主要方向。

參考文獻

[1] Beilinson, A., *Higher regulators of modular curves*, Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part I, Proceedings of a Summer Research Conference held June 12-18, 1983, in Boulder, Colorado, Contemporary Mathematics 55, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island p. 1-34.

[2] Colmez, P., Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, Ann. of Math. 138 (1993) 625-683.

[3] Gekeler, E.-U., *On the Drinfeld discriminant function*, Compositio Math. 106 (1997) no. 2

181-202.

[4] Liu, SC. and Masri, R., A Kronecker limit formula for totally real fields and arithmetic applications, Res. number theory (2015) 1: 8.

[5] Siegel, C. L., *Lectures on advanced analytic number theory*, Tata institute (1961).

[6] Wei, F.-T., *Kronecker limit formula over global function fields*, American Journal of Mathematics vol. 139 no. 4 (2017) 1047-1084.

[7] Wei, F.-T., *Green's functions on Mumford curves*, Mathmatische Annalen vol. 370 Issue 3-4 (2018) 1571-1605.