[研究成果報導]

氣體動力學的回顧與進展

國立成功大學數學系暨應用數學所 吳恭儉

一、氣體動力學的起源

近代物理基本上可以回朔到牛頓(Newton)，那是以牛頓運動定律爲基礎，在宏觀世界和低速狀態下，研究物體的運動行爲。幾個世紀下來，他廣泛的影響了這個世界上的許多物理概念，其中包括了電磁學、相對論力學及量子力學。然而，這些概念只能描述一個（或少數個）物理系統，但若要描述大量的物理系統，如銀河數以兆計的行星運動，或者如 10^{23} 個氣體分子間的作用等等，就非古典力學可描述。要描述這大量的系統，我們必須要有新的定律，去考慮從微觀世界到巨觀世界的過程，這就是所謂的統計力學，而在這個過程中就誕生了氣體動力學(kinetic theory)。

二、波茲曼方程簡介

波茲曼方程是氣體動力學中最具代表性的方程，其未知量 f(t, x, v)是一個機率密度函數(density distribution function)，代表的是在時間 t，位置 x，可測得氣體分子微觀速度爲 v 的機率，他滿足一個微分方程式

$$\frac{df}{dt}+\mathrm{v}\cdot\nabla_x f=Q(f,f).$$

方程式左邊代表的是分子用等速度 v 的方式來直線運動，而右邊代表的是氣體分子間碰撞的狀況，依據其碰撞狀態可分爲硬球(hard sphere)，硬勢(hard potential)及軟勢(soft potential)。需要一提的是，因爲碰撞算子有一些奇異點(singularity)，基於數學上的考量，我們必須將之截斷，這樣的截斷稱之爲 Grad 截斷假設(Grad cut off assumption)。這個方程式滿足了質量守恆，動量守恆及能量守恆，並且 entropy 是非遞增的，這也能讓我們推出平衡態的形式。

除了方程式本身，邊界條件也是一個重要的部分，這裡常用的邊界條件有鏡射(specular reflection)邊界條件，散射(diffuse reflection)邊界條件及 Maxwell 邊界條件（混和鏡射與散射）。不同的邊界條件帶來豐富的性質，也使的研究波茲曼方程變得具有相當高難度的挑戰。

三、波茲曼方程在近代數學上的發展

有關波茲曼方程的數學研究，由於我們已經有了一個穩態解的形式，因此很自然地就會考慮解在穩態附近的行爲，另外非線性部分一般而言是屬於高階項（衰減更快的項），我們把非線性項去掉後，就導出了線性化波茲曼方程。對於線性化波茲曼方程的研究可以回朔到 1912 年，Hilbert [6]考慮了線性化波茲曼方程，將方程式的解對小的 Kundsen 數做漸進展開，並看出其流體上的結構，這就是所謂的 Hilbert 展開，而其後的 Chapman-Enskog 展開[2]也是考慮此類的問題。我們必須認知到，這些展開都是形式上的展開，並沒有得到嚴格的證明。對線性化算子的數學結構（譜結構，也就是 spectrum），要到 1963 年由 Grad 給出了有截斷假設下的硬勢碰撞的完整譜結構[3]。在此之後，整個波茲曼方程的研究開始有了快速的進展，如（以下僅列出與筆者研究較相關者）1974 年 Ukai [8]運用譜的結果做出了非線性波茲曼方程在穩態附近的 well-posedness；2002 年起 Yan Guo [5]用能量估計的方法處理一系列的動力學方程的存在性與衰減估計；2004 年劉太平與尤釋賢[7]構造出線性化波茲曼方程的格林函數，並成功地運用到邊界問題；2013 年 Gualdani，Mischler 與 Mouhot [4]研究了以非對稱形式線性化的波茲曼方程等等。

四、動力學方程的逐點估計

一般而言，處理偏微分方程的方法不外乎

是能量估計與 Sobolev 不等式，這樣的處理方式基本上是得到解的平均行為（解經過積分後的行為），但這樣的結果並無法說明解的局部狀況，簡單的來說也就是解的逐點行為。在線性化波茲曼方程中，第一個能得出逐點行為的結果就硬球的情形，那是劉太平與尤釋賢在 2004 年所得出 [7]，那個結果能完整的將線性化波茲曼方程的解精準的拆解成流體部分、粒子部份及剩餘部分。其中最關鍵的部分就是混和引理(Mixture Lemma)，該引理是將方程內在的速度正則性轉為空間正則性。原始的混和引理證明需要解的完整表示式，但後來證明被筆者抽象化，只需引進一個可與傳輸部分交換的微分算子及能量估計即可[9]。近期筆者與其合作者（上海交大王海濤及成功大學林育竹）已能夠構造出硬勢的逐點估計（但須對初值增加速度權）。

若我們考慮另一個重要的動力學方程：藍道方程，我們會發現他與波茲曼方程的光滑化機制是不同的。波茲曼方程本身不具光滑機制，但我們將粒子部分抽走後，再使用混和引理就能的到空間正則性；而藍道方程本身有一個對速度的橢圓算子，再加上傳輸項，我們發現時間一但為正，立刻就得到空間與速度的光滑性，然而付出的代價是短時間產生 singularity。這樣的現象在筆者與兩位法國學者 Kleber Carrapatoso 及 Isabelle Tristani 的文章就已觀察出[1]。以此為基礎，再配合加權能量估計，筆者與王海濤教授可構造出線性化藍道方程的逐點估計，這是繼波茲曼方程後再一個能夠造出逐點估計的動力學方程。

五、展望

在現有的逐點估計下，我們期待對邊界問題能有進一步認識，也就是能對邊界問題考慮其逐點估計，但這是一個難度相當高的問題，也是筆者將來的研究重心。

參考文獻

[1] K. Carrapatoso, I. Tristani and K.C. Wu (2016), Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation. Arch. Ration. Mech. Anal., 221, 363-418.

[2] S. Chapman (1916), On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monoatomic gas, Philos. Trans. R. Soc. London 216, 279-348.

[3] H. Grad (1963), Asymptotic theory of the Boltzmann equation, Phys. Fluids 6, 147-181.

[4] M.P. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot, Factorization of non-symmetric operators and exponential H-theorem, preprint.

[5] Y. Guo (2002), The Landau equation in a periodic box. Comm. Math. Phys. 231, 391-434.

[6] D. Hilbert (1912), Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen (Teubner, Leipzig).

[7] T.P. Liu and S.H. Yu (2004), The Green function and large-time behavier of solutions for the onedimensional Boltzmann equation, Comm. Pure Appl. Math., 57 1543-1608.

[8] S. Ukai (1974), On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation, Proc. Japan Acad., 50, 179-184.

[9] K.C. Wu (2014), Pointwise behavior of the linearized Boltzmann equation on a torus. SIAM J. Math. Anal., 46, 639-656.