[研究成果報導]

頂點算子代數和怪物單群

中央研究院數學研究所　林正洪

有限單群的分類被認爲是 20 世紀數學中的一個里程碑。除了交錯群(Alternating group)和 16 個李型有限單群的無限序列外，還有 26 個零星單群(Sporadic simple group)。其中最大的一個零星單群被稱爲怪物(Monster)。怪物群被發現之初，數學家即留意到它有許多神秘的特性，其中麥凱和湯普森發現他和古典 j-函數的 q-擴張系列有關，並猜測存在一個怪物群的無窮維表示，它的分級維數(graded dimension)和函數 *j(q)-744* 的 q-系列相同。此外，對每個怪物群的元 g，g 在這個怪物群表示的指示標(character)也是一個模函數。後來，康威和諾頓對這些函數進行了廣泛的計算，並推測函數 $Tg(q)$是一個虧格(genus)爲 0 的模函數。由於怪物群和模函數之間的關接非常神秘及令人驚訝，康威稱這樣的現象爲“月光”(Moonshine)，意思是一些無法觸摸的【空想】。麥凱和湯普森的第一個猜想後來在 20 世紀 80 年代被 Frenkel-Lepowsky-Meruman 等人證明了，証明中利用了物理學弦論中的頂點算子。基於他們的工作，Borcherds [1]引進了頂點代數的概念。後來 Frenkel-Lepowsky-Meruman [2]等人給出頂點算子代數的定義，並證明了麥凱和湯普森所推測的怪物模是一個頂點算子代數，它的自同構群正是怪物單群。康威和諾頓的猜想也在 1990 初期被 Borcherds 證明了，他的方法使用了頂點代數、李代數和弦論中的沒鬼定理。頂點算子代數這一個新的理論就此誕生。在過去的 20 年中，頂點算子代數的理論有許多的進展，它也演變成共形場論及弦論中一個的重要部分。另外，它也提供對怪物群和其它零星單群研究一個重要的工具和理論基礎。筆者的研究主要是頂點算子代數的結構和表示理論，並注重利用頂點算子代數理論來研究怪物單群及其它零星單群的特性。因此撰寫本文，介紹頂點算子代數和怪物群的理論，並描述筆者這幾年一些相關的工作。

頂點算子代數

簡單的說，頂點算子代數就是物理上共形場論(conformal field theory) 的代數結構，它是由多個算子值函數（一般稱爲頂點算子或是「場」，field）所生成的代數結構。頂點算子數是一個整數分級的向量空間$V=\oplus_{n\in Z} V_n$配有一個

$$Y: V \to EndV[[z, z^{-1}]]$$

的線性映射，有兩個特別的向量 1（稱爲眞空 Vaccum）和 w（稱爲 Virasoro 向量或保形向量），並滿足多項條件。其中最主要的兩個公理爲局部性條件及 Virasoro 公理。 局部性意味著給定兩個 V 中的任意元 u 和 v，存在一個正整數 k = k(u,v)，使得滿足以下條件

$$(z_1-z_2)^k(Y(u,z_1)Y(v,z_2)$$

$$-Y(v,z_2)Y(u,z_1))=0.$$

Virasoro 公理則說相於保形向量 w 的頂點算子 $Y(w,z)=\sum_{n\in Z} \quad L(n)z^{-n-2}$滿足 Virasoro 關係：

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+$$

$$\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c.$$

這些公理雖然有點復雜，但卻是研究共形場論一個很好的代數工具。

Virasoro 代數的酉表示

接下來，我們將探討 Virasoro 代數的酉表示(Unitary representation)。首先，讓我們回顧 Virasoro 代數。中心値爲 c 的 Virasoro 代數是一個無限維李代數

$$Vir=\oplus_{n\in Z} CL(n)\oplus Cc$$

滿足交換子關係

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n)$$

$$+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c$$

這個李代數有一個自然的整數層次$(wt(L(n)) = n, n \in Z)$，它也有一個自然的三角分解

$$Vir = Vir^+ \oplus Vir^0 \oplus Vir^-,$$

這裡$Vir^\pm = \oplus_{n \in Z^\pm} CL(n), Vir^0 = CL(0) \oplus Cc$。因此可以定義最高權表示中的 Verma 模。

更精確地說，令$b = Vir^+ \oplus Vir^0$，考慮 b 的一維模 C·1 使得

$$L(n)\cdot 1 = 0 \ \ for\ all\ n > 0;$$

$$L(0)\cdot 1 = 0, c\cdot 1 = c\cdot 1.$$

權重爲 h 和中心值 c 的 Verma 模則定義成的 Vir 的誘導模：

$$M(c,h) = Ind_{U(b)}{}^{U(vir)} C\cdot 1$$

$$= U(Vir) \otimes_{U(b)} C\cdot 1$$

其中 U(·)表示包絡代數。Verma 模 M(c,h)有唯一的最大子模 J，它的商模

$$L(c,h) = M(c,h)/J$$

是一個不可約 Vir-模。Frenkel-Zhu [3]證明 Vir-模 L(c, h)具有自然的頂點算子代數結構。這個頂點算子代數是單的，通常被稱爲 Virasoro 頂點算子代數。若中心值

$$c = c_m = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)}, m = 1,2,\cdots ，$$

已知單頂點算子代數$L(c_m, 0)$ 是有理的， 即所有的模均爲完全可約 。此時，$L(c_m, 0)$的不可約模也被完全分類，它們正是$L(c_m, h^m{}_{r,s})$，

$$h^m{}_{r,s} = \frac{[r(m+3)-s(m+2)]^2-1}{4(m+3)(m+2)},$$

$$1 \le s \le r \le m+1。$$

這些不可約模間的融合律也是清楚的。1996 年，宮本雅彥發現利用融合律，可簡單地定義頂點算子代數上的對合元(Involution)，這方法對怪物群的研究有非常大的影響。

格里斯代數和宮本對合元理論

設 $V = \oplus_{n\ge 0} V_n$ 爲頂點算子代數。如果 $dimV_0 = 1$及$V_1 = 0$，則權 2 的空間V_2有一個交換（但非結合）的代數結構

$$a \times b = a_1 b, \quad a, b \in V_2。$$

另外，有一個不變的雙線性形式

$$(a,b)\cdot 1 = a_3 b, \qquad a, b \in V_2,$$

不變是指$(a \times b, c) = (a, b \times c)$，這個代數稱爲格里斯代數（Griess algebra）。格里斯代數的冪等元在頂點算子代數 V 上可生成一個 Virasoro 代數，V_2上的冪等元 e 被稱爲單 Virasoro 元，如果由 e 所生成的子頂點代數是單的 Virasoro 頂點算子代數。如果中心值爲½，這個單 Virasoro 元則稱爲伊辛向量(Ising vector)。設 e 爲伊辛向量，則由 e 所生成的頂點算子代數是 Virasoro 頂點算子代數$L(\frac{1}{2}, 0)$，它有三個不可約模

$$L\left(\frac{1}{2}, 0\right), \ L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)。$$

利用融合律，宮本雅彥[13]証明以下的線性映射τ_e是頂點算子代數 V 的自同構：

$$\tau_e = \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0) \oplus V_e(1/2), \\ -1 & \text{on } V_e(1/16). \end{cases}$$

這裡$V_e(h)$ 是所有與$L(\frac{1}{2}, h)$同構子模的直和，自同構τ_e一盤被稱爲宮本對合元。假定$\tau_e = id_V$，則映射

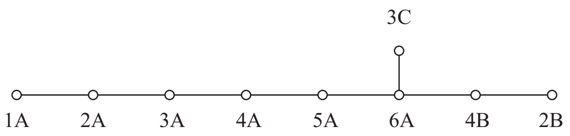
$$\sigma_e = \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0), \\ -1 & \text{on } V_e(1/2). \end{cases}$$

也是 V 的自同構，但σ_e只有在$\tau_e = id_V$的情況下才有意義。當$V = V^\natural$月光頂點算子代數時，它的

自同構群是怪物單群。宮本[14]也証明$V^\natural$上的伊辛向量和怪物單群的 2A 對合元有一個 1 對 1 的關係。

麥凱－哥伯曼－諾頓理論

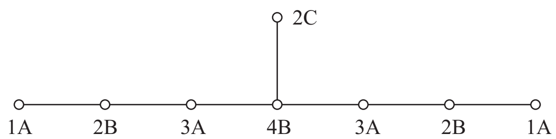
在 1979 年左右，約翰‧麥凱[12]發現了怪物群的 6 對換性和仿射E_8圖之間的關係神秘如下：



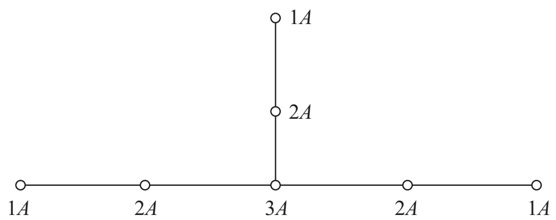
怪物單群的E_8圖

怪物單群的 2A-對合元滿足 6 對換性質，即任意的 2A 元a, b，乘積ab的位數少於 6。另外，乘積ab的共軛類是下列 9 個共軛類之一：$1A$，$2A$，$3A$，$4A$，$5A$，$6A$，$4B$，$2B$，或 $3C$

E_8圖中的數字值則是單根在最高根(highest root)的重數。麥凱也注意到怪嬰單群(Baby Monster)和仿射E_7圖，菲舍爾 3－對換群Fi_{24}和仿射E_6圖之間也有一些類似的關係。



怪嬰群的E_7圖



菲舍爾群Fi_{24}的E_6圖

2004 年，高伯曼和諾頓[4]在麥凱的觀察中加入一些新的現象及豐富了整個理論，但這些關係可能只是一些巧合，沒有明顯的理由去相信這些關係涉及高層的數學理論或有其他特別的原因。

近年，我和多位日本的學者[7, 9, 10]發現可以使用頂點算子代數和宮本對合元理論來解析麥凱－哥伯曼－諾頓所發現的現象。我和羅伯特‧格里斯更提出一個稱爲【月光路徑理論】(Moonshine Path Theory)，希望可以用更腳踏實地的方法來解釋這些現象。特別是我們發現由兩個伊辛向量所生成的頂點子代數有一定的普遍性，所以由相對宮本對合元所生成的的雙面群(Dihedral group)是非常有限，並必須滿足 6 對換性質。因此，麥凱-高伯曼-諾頓現象大部份可用頂點算子代數的理論來解釋，計算也可以轉變成里奇晶格（Leech lattice）上的計算。我們[5, 6]也利用相同的方法來研究麥凱E_7和E_6的發現，同時也得到怪嬰群和$c = \frac{7}{10}$單 Virasoro 元的對應關係及菲舍爾群Fi_{24}和$c = \frac{6}{7}$單 Virasoro 元的對應關係。另外我們也獲得相對的雙面群和仿射E_7-圖和E_6-圖的關係。

框架頂點算子代數

宮本對合元理論也激發框架頂點算子代數的研究。一個單的頂點算子代數 V 會被稱爲框架頂點算子代數，如果它包含一個子代數 F 同構於 n 個 Virasoro 頂點算子代數$L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$的張量積（F 被稱爲 V 的 Virasoro 框架），同時子代數 F 的共形元和 V 的共形元是一樣的。重要的例子包括月光頂點算子代數。這方面的理論最早由宮本[14]，董‧格里斯‧向恩[15]等人所建立。2008 年，山內博和我[11]突破技術困難，獲得框架頂點算子代數一個非常完整的結構理論，同時完成對應宮本對合元的不可約扭曲模的分類。最近，島倉浩樹和我[8]更完成中心值 c = 24 全純形框架頂點算子代數的分類，我們証明正好有 56 個這樣的全純形頂點算子代數，它們的頂點算子代數結構是由權重爲 1 子空間 V1 的李代數結構所決定。另外，島倉和我在其他 c = 24 全純形頂點算子代數的分類上也獲得很多有用的結果。

參考文獻

[1] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068-3071.

[2] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman,

Vertex Operator Algebras and the Monster. Academic Press, New York, 1988.

[3] I.B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representation of affine and Virasoro algebras. Duke Math. J. 66 (1992), 123-168.

[4] G. Glauberman and S. P. Norton, On McKay's connection between the affine E8 diagram and the Monster, Proceedings on Moonshine and Related Topics (Montreal, Quebic, 1999), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 30, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001, pp. 37-42.

[5] G. Hohn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_7 observation on the Baby Monster. Internat. Math. Res. Notices (2012)

[6] G. Hohn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_6 observation on the largest Fischer group. Comm. Math. Physics 310 Vol. 2 (2012), 329-365.

[7] C.H. Lam, M. Miyamoto, Niemeier lattices, Coxeter elements, and McKay's E8-observation on the Monster simple group. Internat. Math. Res. Notices Article ID 35967 (2006), 1-27.

[8] C.H. Lam, H. Shimakura. Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, Amer. J. Math, 137(2015), no. 1, 111-137.

[9] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended E_8-diagram, and McKay's observation on the Monster simple group. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 4107-4123.

[10] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2. Inter. Math. Res. Papers 3 (2005), 117-181.

[11] C.H. Lam, H. Yamauchi. On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, Comm. Math. Phys., 277 (2008), no. 1, 237-285.

[12] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Santa Cruz, Calif, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, American Mathematical Society, Rhode Island, 1980, pp. 183-186.

[13] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras. J. Algebra 179 (1996), 528-548.

[14] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field. Ann. Math. 159 (2004), 535-596.

[15] C. Dong, R.L. Griess, G. Hohn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module. Comm. Math. Phys. **19**, 407-448 (1998)