正特徵值上的希格爾—威爾公式

國立清華大學數學系　魏福村

希格爾—威爾公式（簡稱 SW 公式）建立了 Eisenstein 級數和 theta 級數—兩種不同方式構造的自守型式—之間的關係。而此關係締造了兩級數分別所處世界之間的橋樑，在數論和自守表現的研究影響深遠。本文將從數論的二次虛體擴張之類數（簡稱 CN）公式出發，來解釋 SW 公式之其一看法。

一、從「CN」到「SW」：

令D爲一質數滿足$D \equiv -3 \bmod 4$，考慮以下 Dirichlet L-函數：

$$\mathrm{L}(\mathrm{s}, \chi_D) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \text{，} \mathrm{Re(s)} > 1,$$

其中$\chi_D(n) := \left(\frac{-D}{n}\right)$，Legendre 二次符號。令

$$\Lambda(s, \chi_D) = D^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) L(s, \chi_D) \text{。}$$

其中$\Gamma(s)$爲伽瑪(gamma)函數

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \text{ 。}$$

在此情況下的類數公式(CN)可表示成：

$$\Lambda(1, \chi_D) = \#Cl(O_D) \text{，}$$

這裡$O_D = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-D}}{2}\right]$，而$Cl(O_D)$爲$O_D$的理想類群。

上述之 CN 公式的左右兩邊可分別「延伸」成一 Eisenstein 級數和一 theta 級數：對O_D之任一非零理想 I，可對應於下列一 theta 級數

$$\theta_I(z) = \sum_{x \in I} \exp(2\pi i \cdot \frac{\|x\|}{\|I\|} z) \quad \forall z \in \mathfrak{H} \text{，}$$

其中 $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im(z)}>0\}$，　$\|x\| = x\bar{x}$，且 $\|I\| = \#(O_D/I)$。

從上述表示法可得到$\theta_I(z)$的傅立葉展開得到其常數項爲 1，即：

$$\theta_I(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_I(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z} \text{。}$$

因此，令

$$\Theta_D(z) := \sum_{[n] \in Cl(O_D)} \theta_I(z), \qquad z \in \mathfrak{H} \text{。}$$

則其傅立葉展開之常數項便爲$\#Cl(O_D)$。

另一方面，考慮下列 Eisenstein 級數：

$$E_D(z, s) := \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{\mathrm{Im}(z)^{\frac{s}{2}}}{(cz+d)|cz+d|^s} \phi_D(c, d),$$

$$\text{其中}\phi_D(c, d) = \begin{cases} \chi_D(d), \text{ 若} D \mid c \text{，} \\ iD^{-\frac{1}{2}} \chi_D(c), \text{ 若} D \nmid c \text{。} \end{cases}$$

此 Eisenstein 級數滿足“weight one”轉換律：給$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$使得$ad - bc = 1$且$D \mid c$，則

$$E_D\left(\frac{az+b}{cz+d}, s\right) = (cz+d)\chi_D(d) E_D(z, s)$$

考慮$\tilde{E}_D(z, s) := \Lambda(s+1, \chi_D) E_D(z, s)$。則其傅立葉展開之常數項可知爲

$$\Lambda(1+s, \chi_D) + \Lambda(1-s, \chi_D) \text{。}$$

在此情況下的西格爾—威爾公式(SW)爲：

$$E_D(z, 0) = 2\, \Theta_D(z), \qquad \forall z \in \mathfrak{H} \text{。}$$

透過上述可知$E_D(z, 0)$之傅立葉常數項爲 $2\Lambda(1, \chi_D)$。因此 SW 公式在這情況下可視爲「函數版」之 CN 公式延伸。

二、古典 SW 公式推廣：

1. 希格爾—威爾(Siegel-Weil)公式起源於希格爾提出關於 Eisenstein 級數和 theta 級數的關係，而後由威爾證明了在收斂範圍下最一般的情況。
2. 在 Eisenstein 級數收斂範圍外時，考慮其解析延拓，而在「非均向性」(anisotropic)由 Kudla-Rallis [9]所證明，並很快推廣至「均向性」(isotopic)但 theta 積分保持收斂的情況。
3. 然而在 theta 積分發散時，需先將 theta 積分「正則化」(regulari-zation)，才能將兩邊做比較。這部分的推廣包含 Kudla-Rallis [10]和 Ichino [7]等人的工作，至 Gan-Qiu-Takeda [4]得到了目前最完整的結果。

三、相關應用和發展：

1. L-函數特殊值：Eisenstein 級數在了解由自守表現來的L-函數扮演重要的角色。透過 SW 公式建立與 theta 級數的關係，可將L-函數特殊值用「週期積分」來表示。由此得到許多特殊L-值的重要公式（cf. [11], [15], [1]等）。
2. 幾何 SW 公式：從 Kronecker-Hurwitz 的類數關係開始，大家發現 Eisenstein 級數的傅立葉係數和幾何上的「相交數」(intersection number)有關係。Hirzebruch-Zagier [6]將此現象很精確地在 Hilbert 曲面上呈現出來，開啓了一系列的研究。Kudla [8]運用 adelic 語言，透過 SW 公式來解釋這一現象。所以現在我們可利用[8]來給予 Eisenstein 級數特殊之傅立葉係數的幾何詮釋。
3. 算數 SW 公式：從著名的 Gross-Zagier 公式起，了解 Eisenstein 級數特殊微分值變成一個很重要的方向。而後 Gross-Keating [5]在一種情況連結了其微分值和算術曲線上的「高度」(height)，大家開始探討此背後隱藏的理論。透過許多人(Kudla-Rapoport, Yang, etc.)重要的工作，去年(2019)於 ICCM 上，Li 和 Zhang 宣布證明了 Kudla-Rapoport 猜想。若此結果是正確的，在L-函數特殊值相關研究上會有非常大的助益。

四、正特徵值上的平行結果：

給定一個數爲q的有限體$\mathbb{F}$，我們令$A = \mathbb{F}[t]$（係數在$\mathbb{F}$的單變數t多項式環）、$K = \mathbb{F}(t)$（係數在$\mathbb{F}$的單變數t有理函數體）、和$K_\infty = \mathbb{F}((t^{-1}))$（係數在$\mathbb{F}$的單變數$t^{-1}$洛朗級數體）。令$\mathbb{C}_\infty$爲$K_\infty$的一個代數封閉取完備化，我們可以將$(A, K, K_\infty, \mathbb{C}_\infty)$視作古典設定下$(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$在正特徵值世界中的類比。在函數體這平行世界中，我們有興趣研究在這設定下的 SW 公式。

筆者之前的研究成果[13]證明了正特徵值上的非均向性之 SW 公式，得出L-函數特殊值相關的一系列成果(cf. [12], [3], [2])。而在均向性的情況，目前已知的結果只有在 Eisenstein 級數收斂範圍下的情況。因爲 SW 公式的應用很廣，這部分很需要做更多的研究來推廣，在筆者的未來工作中爲重點之一。

五、最近研究進展：

對於 Eisenstein 級數微分值，筆者在[14]的工作也證明了在「零維度」的情況下之 Kudla-Rapoport-Yang 類比結果。今年和台灣大學郭家瑋博士合作探討函數體上類比於 Hirzebruch-Zagier 所發現到的現象，得出傅立葉係數和 1 維之 Heegner 因子相交數的關係。在此工作中，我們的證明方式和 Hirzebruch-Zagier 完全不同。避開所有繁瑣的計算，我們透過「強逼近定理」來得到兩者之間的連接。我們相信這個方法可以適用於更一般的情況，而這是我們之後發展的重點。

參考文獻：

[1] Chida, M. & Hsieh, M.-L., On the anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, Compos. Math. 151 no. 5 (2015) 863-897.

[2] Chuang, C.-Y. & Wei, F.-T., Waldspurger formula over function fields, Transcations of the American Mathematical Society 371 (2019) 173-198.

[3] Chuang, C.-Y. & Wei, F.-T. & Yu, J., On central critical values of Rankin-type L-functions over global function fields, Proceedings of London Mathematical Society (3) 114 (2017) 333-373.

[4] Gan, W. T. & Qiu, Y. & Takeda S., The regularized Siegel-Weil formula (the second term identity) and the Rallis inner product

formula, Inventiones math. 198 (2014) 739-831.

[5] Gross, B. H. & Keating, K., On the intersection of modular correspondences, Invent. Math 122 (1993) 225-245.

[6] Hirzebruch, F. & Zagier, D., Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of nebentypus, Inventiones math. 36 (1976) 57-113.

[7] Ichino, A., On the regularized Siegel-Weil formula, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 539 (2001) 201-234.

[8] Kudla, S.S., Algebraic cycles on Shimura varieties of orthogonal type, Duke Mathematical Journal vol. 86 no. 01 (1997) 39-78.

[9] Kudla, S. S. & Rallis, S., On the Weil-Siegel formula, Journal für die reine und angewandte Mathematik 387 (1988) 1-68.

[10] Kudla, S. S. & Rallis, S., A regularized Siegel-Weil formula: The first term identity, Ann. Math 140 (1994) 1-80.

[11] Waldspurger, J.-L, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie (French), Compositio Math. 54 (1985), no. 2, 173-242.

[12] On Rankin triple product L-functions over function fields: central critical values, Mathematische Zeitschrift Volume 276 Issue 3-4 (2014) 925-951.

[13] On the Siegel-Weil formula over function fields, The Asian Journal of Mathematics Volume 19 Number 3 (2015) 487-526.

[14] Wei, F.-T., On the derivative of Siegel-Eisenstein series over function fields, Journal of London Mathematical Society (2) 100 (2019) 518-544.

[15] Yuan, X. & Zhang, S. & Zhang, W., Gross-Zagier formula on Shimura curves, Annals of Mathematics Studies vol. 184 Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013.