卡拉比-邱流形與模形式

交通大學數學系　楊一帆

一、卡拉比–邱流形及其 Picard-Fuchs 微分方程

卡拉比–邱流形（Calabi-Yau manifolds，其中之 Yau 為 Shing-Tung Yau，丘成桐，1982 年菲爾茲獎得主及中央研究院院士）是現代數學中非常重要的一類幾何結構，比如說物理中的弦論即建築於卡拉比-邱流形的理論上。因此，有關卡拉比–邱流形的性質是當今數學家與物理學家迫切想要理解的課題。

當複數維度爲一時，所謂的卡拉比-邱流形即爲我們熟悉的橢圓曲線(elliptic curve)，一般而言可用一個三次方程式 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 來描述，其中 t 爲一個給定的複數。(亦即，這三次方程式所有在複數裡的解形成一個卡拉比-邱流形。)從拓樸的角度而言，所有維度爲一的卡拉比-邱流形都與環面相似。(環面即 torus，亦稱輪胎面，參見本簡訊第十七卷第三期中王金龍教授的介紹。)當複數維度爲二時，一個簡單的例子爲 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 1 = tx_1x_2x_3$。當複數維度超過二時，有許多拓樸上本質不一樣的卡拉比-邱流形，其中最簡單的例子爲 $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + 1 = tx_1x_2x_3x_4$，其複維度各爲三。

在一個 n 維的卡拉比–邱流形上，存在一個所謂的 holomorphic differential n-form。比如說，在橢圓曲線 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 上的 holomorphic differential 1-form 爲

$$\omega = dx/y = dx/\sqrt{x(x-1)(x-t)}$$

如果我們將這 holomorphic differential n-form 針對一個適當的區域積分，所得到即所謂的週期(period) 。就橢圓曲線 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 而言，其中一個週期爲

$$2\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

如果我們用 Weierstrass 的 $\wp$-函數去將此橢圓曲線參數化，這個由 holomorphic differential 1-form 積分出來的週期即是 Weierstrass $\wp$-函數的週期。(參見本簡訊第十七卷第三期中王金龍教授的介紹。)

細心的讀者在此必定會留意到，在我們目前的討論中出現的卡拉比-邱流形都帶有一個參數 t。想當然爾，前段描述的週期也跟 t 有關。如果我們針對 t 將週期微分，所得到的依舊會是一個週期。事實上，我們可以證明如果我們將週期當作是 t 的函數，那麼它滿足一個微分方程式，稱作 Picard-Fuchs 微分方程。以橢圓曲線 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 爲例，若我們令

$$F(t) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}},$$

那麼 $F(t)$滿足的微分方程式爲

$$(1-t)\theta^2 F(t) - t\theta F(t) - \frac{t}{4}F(t) = 0,$$

其中 θ 代表微分算子 td/dt。另兩組先前提到的卡拉比–邱流形 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 1 = tx_1x_2x_3$ 和 $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + 1 = tx_1x_2x_3x_4$ 的 Picard-Fuchs 微分方程則爲

$$\theta^3 y - 4t(4\theta+1)(4\theta+2)(4\theta+3)y = 0$$

及

$$\theta^4 y - 5t(5\theta+1)(5\theta+2)(5\theta+3)(5\theta+4)y = 0.$$

Picard-Fuchs 微分方程在有關卡拉比–邱流形的討論中佔有舉足輕重的地位。比如說，弦論中出現的 mirror map、Yukawa coupling 及 instanton number 等即可藉由 Picard-Fuchs 微分方程做計算。Picard-Fuchs 微分方程的解析性質也反映了卡拉比–邱流形的性質。

二 Picard-Fuchs 微分方程的 Monodromy

當我們討論一個 Picard-Fuchs 微分方程的性質時，奇點(singularity)是一個不可或缺的要素。比

如說，如一個 Picard-Fuchs 微分方程有三個奇點且微分方程爲二階時，奇點附近的局部性質完全決定整個微分方程的廣域性質。在此，所謂奇點指的是複數平面上的一些特別的點使得 Picard-Fuchs 微分方程在那點附近的解不再是解析的(analytic)。

在上述的微分方程 $(1-t)\theta^2 F(t) - t\theta F(t) - tF(t)/4 = 0$ 中共有三個奇點，分別爲 0、1、及∞（無窮遠點）。以奇點 0 爲例，此微分方程在 0 附近有兩個線性獨立的解，其中之一爲解析函數，而另一解則含有一個對數函數。事實上，這兩個解的級數展開各爲

$$f_1(t) = 1 + \frac{1}{4}t + \frac{9}{64}t^2 + \frac{25}{256}t^3 + \cdots$$

及

$$f_2(t) = f_1(t)\log t + \text{（一個解析函數）。}$$

注意到這兩個級數展開只在一個複數空間的一個小區域收斂，因此當這兩個解沿著一個複數平面上的曲線變化時，這牽涉到所謂的解析延拓(analytic continuation)的問題。比如說，我們現在令 C 爲一個繞過 0 的小閉曲線(closed curve)，並從 C 上的一點 z_0 出發而考慮這兩個解的變化。因爲 $f_1(t)$ 在 0 附近爲解析函數，當我們繞回 z_0 時，$f_1(t)$ 並沒有任何變化。另一方面，因爲 $f_2(t)$ 含有一個對數函數，當我們沿著 C 繞回 z_0 時，$f_2(t)$ 已經不再是原來的函數。若我們是逆時針繞著 C 一圈的話，那麼 $f_2(t)$ 就變成 $f_2(t) + 2\pi i f_1(t)$。在數學上，我們稱這種變化爲 monodromy。

若我們選定一組固定的解作爲解空間的基底 (basis)，那麼我們便可用矩陣來表示 monodromy。更進一步的，複數空間各種不同的路徑都會給出一個 monodromy，當我們考慮所有的可能性後，我們把所有 monodromy 所形成的集合稱作 monodromy group。以上述的例子而言，若我們選定 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)/(\pi i)$ 做爲基底，那麼其 monodromy group 即爲

$$\Gamma(2)\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1, \text{其中}a, d\text{爲奇數}, \text{而}b, c\text{爲偶數}\right\}$$

三、模形式和模函數(modular forms and modular functions)

卡拉比-邱流形的 Picard-Fuchs 微分方程與數論中的模形式和模函數(modular forms and modular functions)有密切的關聯。在我們定義何謂模形式與模函數前，讓我們先以橢圓曲線 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 做例子。

令 $\tau = f_2(t)/(\pi i f_1(t))$，並利用反函數定理將 t 想做是 τ 的函數。根據前面的討論，我們知道 τ 在 monodromy 的作用下會變成 $(a\tau+b)/(c\tau+d)$，其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 爲在 $\Gamma(2)$ 中的矩陣。另一方面 t 在整個複數平面皆爲解析，所以在 monodromy 的作用下不會有任何變化。所以，若我們將 t 當作是 τ 的函數時，則對所有 $\Gamma(2)$ 中的矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，我們皆有

$$t\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = t(\tau).$$

根據同樣的想法，我們發現若將 $f_1(t)$ 想成 τ 的函數，則其滿足

$$f_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)\, f_1(\tau).$$

在數學中，我們將滿足 $g\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k g(\tau)$ 的函數 $g(\tau)$ 稱作爲一個模形式。當其中的整數 k 爲 0 時，$g(\tau)$ 就被稱作是一個模函數。

模形式與模函數理論在現代數學中是非常重要的領域，它們的算術性質經常可用來解決數學中的問題。其中最著名的例子爲費馬最後定理(Fermat’s Last Theorem)的証明。(所謂的費馬最後定理指的是方程式 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n \geq 3$ 時沒有解 (x, y, z) 使得 x, y, z 皆爲正整數。)

除了 $y^2 = x(x-1)(x-t)$ 的 Picard-Fuchs 微分方程之外，在前面提到的卡拉比-邱流形另一個例子 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 1 = tx_1x_2x_3$ 中，其 monodromy group 也是與 $\Gamma(2)$ 有關。在適當的設定下，t 也會是一個模函數，而其微分方程的解則成爲一個模形式。一些有關此卡拉比-邱流形的幾何性質也因此可藉由模函數來討論。

當卡拉比-邱流形的維度爲三時，情況變的複雜許多。

四、三維卡拉比–邱流形與 Siegel 模形式 (Calabi-Yau threefolds and Siegel modular forms)

複數維度爲三的卡拉比-邱流形是弦論學家最有興趣的情況，因爲部分的弦論基礎即建築於其上。而就數學的角度而言，它們也比一維及二維的卡拉比-邱流形更具挑戰性。比如說，其 Picard-Fuchs 微分方程便不再與前述的模函數及模形式有關。

在本人與合作者最近的研究工作中，我們討論三維卡拉比–邱流形其 Picard-Fuchs 微分方程的 monodromy group。當 Picard-Fuchs 微分方程爲四階超幾何微分方程(hypergeometric differential equations)時，我們發現其 monodromy group 落在 simplectic group

$$Sp(4,Z)=\left\{A\in SL(4,Z): A^t JA=J\right\}$$

的一些特別的同餘子群(congruence subgroup)中。其中的符號 $SL(4, Z)$代表四乘四整係數矩陣，

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而 A^t 代表一個矩陣 A 的轉置矩陣。這很自然地導入下述的問題：

三維卡拉比–邱流形的 Picard-Fuchs 微分方程與 Siegel 模形式有什麼關聯？

這邊所謂的 Siegel 模形式是前述模形式的一個推廣。一個 Siegel 模形式 $f(Z)$ 是一個定義在

$$\left\{Z\in M(2,C): Z^t=Z, \operatorname{Im} Z\text{爲正定}\right\}$$

的函數，且其針對所有 $Sp(4, Z)$的矩陣 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (A, B, C, D 各爲二乘二的方陣)滿足

$$f\left((AZ+B)(CZ+D)^{-1}\right)=(CZ+D)^k f(Z).$$

若三維卡拉比-邱流形的 Picard-Fuchs 微分方程與 Siegel 模形式的確有關聯，且其關聯可以被明確地描述，那麼或許許多有關卡拉比-邱流形的幾何與算術性質便可用 Siegel 模形式來研究。但是在此我們必須強調，雖然三維卡拉比-邱流形的 Picard-Fuchs 微分方程的 monodromy group 落在 $Sp(4,Z)$ 的同餘子群之中，但是它與這些同餘子群之間似乎仍存在極大的差異。因此，針對三維卡拉比-邱流形與 Siegel 模形式是否有關聯這個問題，我們依舊持著保留的態度。

五、結語

有關三維卡拉比-邱流形的研究是一個介於數學物理、幾何、與數論之間的問題。在過去，弦論學家藉由物理現象預測了許多三維卡拉比-邱流形的幾何性質，其中有許多是幾何學家仍無法證明的，這給了幾何學家豐富的題材去研究並發展新的理論。另一方面，因爲許多卡拉比-邱流形是由多項式定義出來的，我們也可考慮其上的算術的性質，諸如 L-函數及迦羅瓦表現理論(Galois representation)等等。更進一步，卡拉比-邱流形的 Picard-Fuchs 微分方程也將卡拉比-邱流形與數論中的模形式聯繫在一起。反過來講，幾何學家與數論學家也提供弦論學家許多工具去發展弦論。在未來，也唯有藉由這三個領域之間密切的結合與互動，我們才能對卡拉比-邱流形的理解有重要的突破。

參考文獻

[1] Yao-Han Chen, Yifan Yang and Noriko Yui, *J. Reine Angew. Math.*, **616**, 167 (2008).