圖形的圓環色數

中山大學應用數學系　朱緒鼎

一、引言

一個圖 G 由頂點集和邊集組成。每條邊連結兩個頂點。經典的圖形著色是將圖的頂點對應到一個顏色集，使得有邊相連的頂點對應到不同的顏色。圖的頂點集，邊集和顏色集往往是有限集。當顏色集含 k 個顏色時，該著色被稱爲 k-著色，而顏色集常用集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 來表示。圖 G 的色數(chromatic number) $\chi(G)$ 是使得 G 可 k-著色的最小整數 k 。

圖形著色是各種資源分配問題的數學模型。顏色代表資源，圖的頂點代表資源的消費者，圖的邊代表消費者之間的不相容性。圖形著色研究如何對資源做最優的分配。由於圖形著色有廣泛的應用，又有許多陳述簡單卻非常有挑戰性的問題，圖形著色一直是圖論中一個非常活躍的研究領域。近幾十年來，一些著名的難題獲得解決。例如，1977 年，藉助於計算機，Appel[17] 和 Haken[18] 證明了四色定理：每個可嵌入平面的圖都可四著色。2002 年，Chudnovsky, Robertson, Seymour 和 Thomas[19]證明了強完美圖定理：若圖 G 的導出子圖族不含長度大於 3 的奇圈或長度大於 3 的奇圈的補圖，則 G 的任意子圖 H 的色數等於 H 所含最大完全子圖的頂點數。在經典圖形著色被廣泛研究的同時，一些圖形著色的推廣和變形也受到重視，其研究也取得豐碩的成果。本文重點介紹圖形著色的一個推廣：圖形的圓著色(circular coloring of graphs)。

二、圖形的圓環著色及應用

圖形的圓環著色和圓環色數的概念最早是由 Vince [11] 於 1988 年提出。當時被稱爲星色數(star-chromatic number)。1997 年筆者再撰寫第一篇有關這一研究方向的回顧性文章[15]時改用現名。圖的圓環色數有很多等價的定義。下面的定義基本上等同於文[13]中的定義。它解釋了圓環著色和圓環色數的由來。

設 r 爲一實數。令 $S(r)$ 爲把實數區間 $[0,r]$ 中的 0 和 r 合成一點所得的周長爲 r 的圓環。定義 $S(r)$ 上的距離函數 $d(a,b)=|a-b|_r=\min\{|a-b|, r-|a-b|\}$。換言之，圓環 $S(r)$ 上兩點 a,b 間的距離爲連結 a,b 的兩段弧中較短的弧的長度。設 $G=(V,E)$ 是一個圖，$r\geq 1$ 是一實數。若 $f\to S(r)$ 滿足條件：$\forall xy\in E$, $|f(x)-f(y)|_r\geq 1$，我們稱 f 爲 G 的一個 r-圓環著色(circular r-coloring)。圖 G 的圓環色數定義爲 $\chi_c(G)=\inf\{r$：存在一個 G 的 r-圓環著色$\}$。

圖的圓環著色是許多週期性排程問題的數學模型。舉例來說，在繁忙交通交叉路口設置紅綠燈。紅綠燈的信號變換是週期性的，我們要在每一個週期內爲每一個交通流安排一個單位時間長的綠燈時間。有些交通流可同時通行，有些不可以。用圖 G 的頂點來表示交通流，若兩交通流不可同時通行，則在任意這兩個交通流的頂點間連一條邊。用 $S(r)$ 表示一個週期的 r 單位時間的時鐘。對交通流 x，用 $f(x)$ 表示交通流 x 在一個交通週期內綠燈亮起的時刻，選擇一個合乎要求的紅綠燈信號排程就是對應圖 G 的一個 r-圓環著色。求出圖 G 的圓環色數等價於求出最小的紅綠燈週期。

當然，一般的交通信號燈的安排沒有複雜到要用數學模型來求解的程度。但是，在計算機領域，有許多類似的但複雜許多的週期性排成問題。例如，一個在計算機領域頗受注意的平行計算問題就等價於圖的圓環色數問題。假設有若干台計算機共同的承擔一件任務。這些計算機有的會分享一些資料庫。當計算機 A 運行時，它會閱讀及修改它權限所及的資料庫。這樣一來，兩台有分享資料庫的計算機不可同時運行。若計算機 A、B 有分享資源，爲公平起見，A、B 運行的時間須互相交替。在滿足上述要求情況下，如何有效安排各計算機的運行時呢？在最優的安排下，每一單位時間內，平均占總數多大比例的計算機在運行呢？計算機科學家發展了一些處裡的這一問題的方法，在筆者和葉鴻國合作的一篇文章中[12]，我們證明了以下結果：令

$G=(V,E)$，其中每一頂點$v\in V$對應一計算機，$xy\in E$ 表示計算機 x,y 有分享資料庫。則 $1/\chi_c(G)$ 是最優安排下平均每一單位時間內運行的計算機所佔計算機總數的比例。

三、圖的圓環色數與色數的關係

若 f 是圖 G 的 r-圓環著色，對 $x\in V(G)$，令 $g(x)=\lfloor f(x)\rfloor$。則 g 是 G 的一個 k-著色，其中 $k=\lceil r\rceil$。反之，若 g 是 G 的一個 k-著色，我們可以假設顏色集合爲 $\{0,1,\cdots,k-1\}$。則 g 也是 G 的一個 k-圓環著色。所以，對任意的圖 G，$\chi(G)-1<\chi_c(G)\le\chi(G)$。換言之，$\chi(G)=\lceil\chi_c(G)\rceil$。據此，我們稱呼 $\chi_c(G)$ 是 $\chi(G)$ 的精細化(refinement)。而 $\chi(G)$ 則是 $\chi_c(G)$ 的近似值。Vince[11]在 1988 年證明對任意的有理數 $r\ge 2$，存在一有限圖 G，滿足 $\chi_c(G)=r$。一個很自然的問題是什麼情況之下 $\chi_c(G)=\chi(G)$，什麼條件下 $\chi_c(G)$ 更靠近 $\chi(G)-1$ 呢？1993 年，Guichard[5]證明要判斷一個圖 G 是否滿足 $\chi_c(G)>\chi(G)$ 是一個 NP-hard 的問題。儘管如此，迄今爲止的研究給出了一些有意義的充分條件或必要條件。范更華在[3]中將證明若 $\overline{G}$ 沒有 Hamilton[20]圈，則 $\chi_c(G)=\chi(G)$。在筆者和 Steffen[20]的一篇論文中，我們證明若 G 是可唯一 k-著色的(即 G 可 k-著色，但是除了顏色名稱的更換外，只有唯一的一種 k-著色的方法)，則 $\chi_c(G)=\chi(G)=k$。相對地，若 G 是臨界 k-著色(即 G 不可($k-1$)-著色，但去掉任一頂點後都可以($k-1$)-著色。且 G 的圍長(girth，即圖 G 中最短圈的長度)充份大，則 $\chi_c(G)$ 充分靠近 $\chi(G)-1$。這個結果很直接地顯示了 $\chi_c(G)$ 是 $\chi(G)$ 的精細化的意義。當 G 可唯一 k-著色時，沒有可節省顏色的空間。當 G 是臨界 k-著色時，雖然需要 k-色才能將 G 的頂點著色，但是，第 k 色可以只用在一個頂點上，當圍長很大時，可看作第 k 色”几乎”沒用到，故有較大的節省顏色的空間。

四、具有大圍長的圖的圓環色數

Erdos[23]有一個有關圖形著色的經典結果：對任意正整數 k 和 g，存在一個圖 G，其圍長大於 g，其色數等於 k。這一經典結果備受重視，有各種各樣的推廣。一個很自然的問題是對圖的圓環色數，同樣的推論是否成立？筆者首先用機率的方法証明了對任意的正整數 g，任意的有理數 $r\ge 2$，存在一個圖 G，其圍長大於 g，其圓環色數等於 r。其後在筆者和 Nesetril[9]合作的文章以及和潘志實合作的文章中分別給出了 $r\ge 3$ 和 $r<3$ 的情形下的構造性證明。在和 Hajiabolhassen[24]合作的文章中，我們更證明了存在具有大圍長以及給定圓環色數的圖其最大頂點度數可由一個與圍長無關的常數(但依賴圓環色數 r)爲其上界。

關於具大圍長以及給定圓環色數的圖的存在性定理,有很多推廣的途徑。一種是除了要求圖 G 具給定圓環色數 r 之外，還要求圖 G 恰好有給定個數的 r-圓環著色數，例如，可要求圖 G 是唯一 r-著色的，或者恰好有三個不同的 r-圓環著色。另一種推廣是將著色換作圖的同態(圖的著色，圓環著色，以及其它一些圖形著色的變形及推廣，均是圖的同態的特例)。這一類的推廣，在文獻[9]中完成。

五、平面圖及 K_n - minor free 圖的圓環色數

平面圖的著色問題是圖形著色研究的一個重要課題。四色問題是該類研究的重要動力。平面圖的圓環色數也獲得高度的注意。四色定理顯示對任意的平面圖 G，$\chi_c(G)\le\chi(G)\le 4$。又若圖 G 非空 (至少含一條邊)，則 $\chi_c(G)\ge 2$。哪一些介於 2 和 4 之間的有理數是有限平面圖的圓環色數的可能値呢？1997 年，Moser[21]證明了對任意的有理數 $r\in[2,3]$，存在一個有限的平面圖 G，其圓環色數等於 r。1999 年，筆者[14]證明了對任意的有理數 $r\in[3,4]$，存在一個有限的平面圖 G，其圓環色數等於 r。至此，該問題獲得完整的答案。

四色定理雖然是圖形著色中一個非常重要的定理，但它只是一個更廣泛更強的猜想-Hadwiger 猜想的一個特殊情形。一個圖 G 被稱作 K_n - minor free 是指不可以通過對 G 的某子圖作邊收縮而得到有 n 個點的完全圖 K_n。Hadwiger 猜想：對任意的正整數 n，若 G 是 K_n - minor free，則 $\chi(G)\le n-1$。該猜想被証明在 $n\le 6$ 時是成立的，其中 $n=5$ 的情形等價於四色定理。若該猜想成立，則對任意 n，當 G 是 K_n - minor free 時，$\chi_c(G)\le\chi(G)\le n-1$。同樣

地人們自然要問什麼樣的有理數 r 是 K_n - minor free 圖的圓環色數的可能值呢？在筆者和 Hell 合作的文章[6]中，我們證明了當 $n=4$ 時，一個 K_4 - minor free 的圖 G，其圓環色數或者等於 3，或者小於等於 $8/3$。換言之，區間 $(\frac{8}{3},3)$ 中的任意有理數都不是任何 K_4 - minor free 圖的圓環色數。在筆者和潘志實合作的文章[10]中，我們証明了對任意的有理數 $r\in[2,\frac{8}{3}]$，均存在一個 K_4 - minor free 的圖 G，其圓環色數等於 r。而當 $n\geq 5$ 時，在筆者和潘志實、廖勝強合作的文章[8]中，我們證明了對任意的有理數 $r\in[2,n-1]$，均存在一個 K_n - minor free 的圖 G，其圓環色數等於 r。至此，在假定 Hadwiger 猜想成立的情形下？ K_n - minor free 圖的圓環色數可能值得以完全確定。

若 G 是一個平面圖(或者 K_n - minor free 圖)，當 G 的圍長很大時，其圓環色數的值如何呢？Galluccio、Goddyn 和 Hell [4] 證明，這類圖若圍長充分大，則其圓環色數充分接近 2。當然，圓環色數接近 2 的程度與圖 G 的圍長有關。這兩者間的確切關係尚有許多未解決的問題。當 G 是平面圖時，Jaeger 的一個猜想蘊含這樣一個命題：若 G 的圍長大於等於 $4k$，則其圓環色數小於等於 $2+\frac{1}{k}$。該命題尚未被證明。筆者證明若 G 的圍長大魚等於 $8k-3$ 時，其圓環色數小於等於 $2+\frac{1}{k}$。2005 年 Borodin, Kim, Kostochka 和 West[2] 將該結果強化爲當圍長小於等於 $\frac{20k-2}{3}$ 時，其圓環色數小於等於 $2+\frac{1}{k}$。而對於 K_4 - minor free 圖的圓環色數與圍長之間的關係，則在一系列潘志實和我的合作中獲得完整的答案。

六、線圖的圓環色數

圖 G 的線圖，記作 $L(G)$，其頂點集爲 G 的邊集，若 $L(G)$ 中的兩頂點 e,e' 作爲 G 的邊有公共端點，則這兩頂點在 $L(G)$ 中有邊相連。將圖 $L(G)$ 的頂點著色，對應於將圖 G 的邊著色，圖 $L(G)$ 的圓環色數被稱爲圖 G 的圓環色指標 (Circular chromatic index)。Vizing[25]有一個關於圖的色指標(chromatic index)的經典結果：若 G 是不含重邊的圖，最大頂點度數爲 d，則其色指標(即 $L(G)$ 的色數)爲 d 或者 $d+1$。由此容易推出，若 G 是不含重邊的圖，最大頂點度數爲 d，則其圓環色指標介於 d 和 $d+1$ 之間。同樣地，人們自然會問，d 和 $d+1$ 之間的那些有理數是圖 G 的圓環色指標可能值呢？在文章[1]中，我們證明了若 G 最大頂點度數爲 3 的圖，則 G 的圓環色指標或者是 4，或者小於等於 $\frac{11}{3}$。Kral[22] 等人證明了三正則圖 G，若圍長充分大，則其圓環色指標會充分接近 3。在[7]中，我門將此結果推廣到一般的圖上，證明了對任意正整數 $d\geq 2$，若圖 G 的最大頂點度數爲 d，當 G 的圍長充分大時，其圓環色指標充分接近 d。

無論是圖的圓環色指標，還是圖的圓環色數與圖的結構之間的關係，都有很多未解決的難題。圖的圓環著色的研究越來越受到重視。除了研究成果的豐富，研究方法也越來越多樣化。如機率的方法和代數拓樸的方法在圖的圓環色數的研究中導出一些深刻的結果。文[16]對圓環色數的研究的近況有比較詳細的介紹。

参考文獻

[1] P. Afshani, M. Ghandehari, M. Ghandehari, H. Hatami, R. Tusserkani and X. Zhu, *J. Graph Theory*, **49**, 325 (2005).

[2] O. V. Borodin, S. J. Kim, A. V. Kostochka, and D. B. West, *J. Combin. Theory Ser. B*, **90**, 147 (2004).

[3] G. Fan, *Combinatorica*, **24**, 127 (2004).

[4] A. Galluccio, L. Goddyn and P. Hell, *J. Combin. Theory Ser. B*, **83**, 1 (2001).

[5] D. Guichard, *J. Graph Theory*, **17**, 129 (1993).

[6] P. Hell and X. Zhu, *J. Graph Theory*, **33**, 14 (2000).

[7] T. Kaiser, D. Kral, R. Skrekovski and X. Zhu, *J. Combin. Theory Ser. B*, to appear.

[8] S. Liaw, Z. Pan and X. Zhu, *Discrete Math.*, **263**, 191 (2003).

[9] J. Nesetril and X.Zhu, *J. Combin. Theory Ser. B*, **90**, 161 (2004).

[10] Z. Pan and X. Zhu, *J. Graph Theory*, **46**, 57 (2004).

[11] A. Vince, *J. Graph Theory*, **12**, 551 (1988).

[12] H. Yeh and X. Zhu, *Theoret. Comput. Sci.*, **332**, 447 (2005).

[13] X. Zhu, *J. Graph Theory.*, **16**, 557 (1992).

[14] X. Zhu, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **76**, 170 (1999).

[15] X. Zhu, *Discrete Math*., **229**, 371 (2001).

[16] X. Zhu, Recent developments in circular colouring of graphs, manuscript (2005).

[17] K. Appel and W. Haken, *Illonois J. Math*., **21**, 429 (1977).

[18] K. Appel and W. Haken, *Illonois J. Math*., **21**, 491 (1977).

[19] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, *Math. Program*., **97**, 405 (2003).

[20] E. Steffen and X. Zhu, *Combinatorica*., **16**, 439 (1996).

[21] D. Moser, *J. Graph Theory*., **24**, 33 (1997).

[22] T. Kaiser, D. Kral, R. Skrekovski, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **92**, 41 (2004).

[23] P. Erdos, *Canad. J. Math.*, **11**, 34. (1959)

[24] H. Hajiabolhassan and X. Zhu, *Graphs and Combinatorics*, **20**, 65. (2004)

[25] V.G . Vizing, *Diskret. Analiz.*, **3**, 24. (1964)