拉格拉奇極小子流形與相關問題

台灣大學數學系　李瑩英

尋找自然的規律，並瞭解在眾多可能中，何者才是自然世界會選擇的形式，一直是推動自然科學研究的主要動機之一。這些問題，有的在適當的模型下，能轉化成純粹的數學問題，並且得到充分的解答及預測。數學中的變分學，便是其中一項很重要的研究工具。然而即使抽離于自然現象之外，在數學的各項結構中，尋找其中最自然的代表元素，本身即是數學世界中，非常重要的問題之一。

我的研究主要都是圍繞在這個精神之下。它們包括三類不同，但又息息相關的主題。第一項是調和映射，第二是極小子流形，第三則是拉格拉奇(Lagrangian)極小子流形。對於兩黎曼流形間的映射，我們可以很自然地賦予它一個能量，當這個能量取得極小值，或是能量函數的臨界點時，該映射則稱為這兩個黎曼流形間的調和映射。而極小子流形指的是在黎曼流形的子流形中（且滿足某些限制條件），面積最小者。正確來說，我們只需要要求是面積函數的臨界點，但產生最小值的情況，當然是我們最感興趣的。拉格拉奇極小子流形，則是同時考慮黎曼結構與辛結構的產物。在探討物體運動的力學中，我們通常會在同時包括位置與動量兩種座標的相(phase)空間中，解其運動方程式。像這種座標會成對（位置與動量）出現的流形，就稱為具有辛結構。物體的運動軌跡，一定會落在一個維度是全空間維度的一半，而且具特殊性質的子流形－拉格拉奇子流形。拉格拉奇子流形是辛流形中，非常重要而且自然的子流形。刻勒流形，同時具有黎曼結構（即有一個黎曼距離）與辛結構，因此我們研究既是拉格拉奇子流形，又是極小子流形的東西，稱為拉格拉奇極小子流形。

當我們在心目中，定位出所謂自然的課題之後，接下來就必須有方法能找到這些標的，並且說明它們具有怎樣的好性質，以驗證或襯托出為何選擇它們為"自然的代表元"。在調和映射和極小子流形這兩個領域中，對這些問題已有許多的研究，並且得到相當完整的結果，同時在很多實際的問題及現象有所應用及印證。我這方面的工作，主要是在此基礎上，對其一些性質，做進一步的探索[2,3,5,6,7,8,9]。拉格拉奇極小子流形則尚是一塊處女地，還有許多問題尚待解決，也因此我在這方面著力較多。我們一開始研究這個領域的動機，完全是來自於數學本身。因為當餘維較大時，極小子流形的各項性質並不是很令人滿意，我們希望多了拉格拉奇條件後，在一半維度的子流形能得到較好的結果。而之後，大家才知道在彈性力學的模型以及在超弦(super string)理論中，拉格拉奇極小子流形都是自然產生，而且是非常重要的主題。特別在超弦理論中，Strominger, Yau 及 Zaslow[11]提出用拉格拉奇極小子流形(特殊拉格拉奇流形)的模空間，來構造鏡流形，因此對拉格拉奇極小子流形(特殊拉格拉奇流形)相關性質的瞭解及研究，就變得特別重要和迫切。很不幸地，即使對最重要的存在性，我們所知都十分有限。對於這方面，我有兩個工作。其中一篇說明在某些情況下的極小子曲面，就一定會是拉格拉奇極小子曲面，而且是浸入（immersion）的[1]。由於我們知道極小子曲面的存在性，因此這個結果就幫我們找到一些拉格拉奇極小子曲面，而知道這個結果，反過來又能幫助我們證得在該同調類中，極小子曲面的唯一性。一般而言，要證明極小子曲面的唯一性，是相當困難的問題。我們的結果顯示引進辛結構及研究拉格拉奇極小子流形，能幫助我們瞭解一般的極小子流形，這或許是研究這類問題新的有力工具。

對於一般的刻勒—愛因斯坦複曲面（註一），我們則是透過距離的改變，來研究其存在性。結果可敘述如下[4]：假設對一個負曲率的刻勒—愛因斯坦距離，我們已知存在一個拉格拉奇極小子曲面。則對任何可由此距離連續變化得來的其他刻勒—愛因斯坦距離，我們也都可以找到一個相應的拉格拉奇極小子曲面（且與原曲面在同一同倫類中）。注意此時大空間的複結構也是可以改變的。這個問題的主要困難在於當新距離離開原距離很遠時，其相應的拉格拉奇極小子曲面可能會產生歧異點，而如何對有歧異點的拉格拉奇極小子曲面作形變（deformation），則是十分不清楚的。我的方法是從映射的觀點出發，利用在我們情況中的拉格拉奇極小子曲面是穩定的，先找出一個

相應的穩定極小子曲面。而後透過研究廣義附屬數（adjunction number）的變化，證明這些極小子曲面會滿足拉格拉奇條件。因此無論在何種情況下，我們總是有局部的形變。我們又能證得此任一序列的面積一定會有界，從而證明有一子序列會收斂到拉格拉奇極小子曲面。由連通性，我們可知凡是可連續變化得的刻勒—愛因斯坦距離，都有一相應的拉格拉奇極小子曲面。

知名數學家 R. Schoen 和 J. Wolfson[10]利用一個完全不同的方式來尋找拉格拉奇極小子流形。他們是在拉格拉奇子流形中（且落于同一同倫類），尋找面積最小者。由幾何測度的理論，我們知道可以找到一個面積最小的。此最小者，可以證明是拉格拉奇子流形，然而一般而言，不一定是極小子流形。另外光滑性是一個很大的困難。在刻勒—愛因斯坦複曲面中，Schoen 和 Wolfson 宣稱他們可以解決這個困難。這是個很重要的結果，但其中用到相當困難而且複雜的分析技巧，大家都在期盼正式文章的出爐。我們前面提到克服了有歧異點的拉格拉奇極小子曲面的形變，這在高維情況下，依然沒有解決的眉目，這個問題是在找鏡流形中很重要的關鍵步驟。對於拉格拉奇極小子流形，還有許多問題尚待解決，雖然這幾年來，有越來越多的數學家，投入其中的研究，但一切可以說才剛起步而已。

註一：在刻勒流形中，存在一些障礙，使我們無法預期可以找到拉格拉奇極小子流形。但如果限制在刻勒—愛因斯坦流形，則此障礙將消失。

參考文獻

[1] Y. I. Lee, *Communications in Analysis and Geometry*, **2**, 579 (1994).

[2] Y. I. Lee and D. C. Wu, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **13**, 231 (1995).

[3] Y. I. Lee, A. N. Wang and D. C. Wu, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **28**, 398 (1996).

[4] Y. I. Lee, *Journal of Diff Geometry*, **50**, 299 (1998).

[5] Y. I. Lee, A. N. Wang and D. C. Wu, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **17**, 1 (1999).

[6] Y. I. Lee, The Deformation of Branched Minimal Surfaces, preprint.

[7] Y. I. Lee, A. N. Wang and D. C. Wu, Harmonic Maps on Tori, preprint.

[8] Y. I. Lee, A. N. Wang and D. C. Wu, A Bridge Principle for Harmonic Diffeomorphism, preprint.

[9] Y. I. Lee, Manifolds with Nonnegative Scalar Curvature, preprint.

[10] R. Schoen & J.G. Wolfson, Minimizing volume among Lagrangian sub-manifolds, preprint.

[11] A. Strominger, S.T. Yau and E. Zaslow, *Nuclear Phys.*, **B 479** 243 (1996).