

細胞類神經網路模型的數學研究

交通大學應用數學系 林松山

一、前言

一九八八年柏克萊加州大學電機系蔡少堂 (L. O. Chua) 教授與其合作者發明了細胞類神經網路模型 (Cellular Neural Network, CNN)。蔡教授是非線性網路專家，他的 Chua's Circuit 及 Chua's attractor 是非常有名的。工程上，蔡教授希望 CNN 能做影像處理，生物視覺等之用。他更希望 CNN 能模擬人腦的活動。

一個典型的二維細胞類神經網路系統可寫成：

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -x_{ij} + z + \sum_{|k|, |l| \leq d} a_{kl} y_{i+k, j+l} + \sum_{|k|, |l| \leq d} b_{kl} u_{i+k, j+l}$$

在這裡， $x_{ij}(0)$ 為初始條件， x_{ij} 為神經元 C_{ij} 的內部狀態， y_{ij} 為神經元 C_{ij} 的輸出， u_{ij} 為神經元 C_{ij} 的輸入 (圖一)；而輸出函數

$$y = f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) \text{ (圖二)。} A = (a_{kl})$$

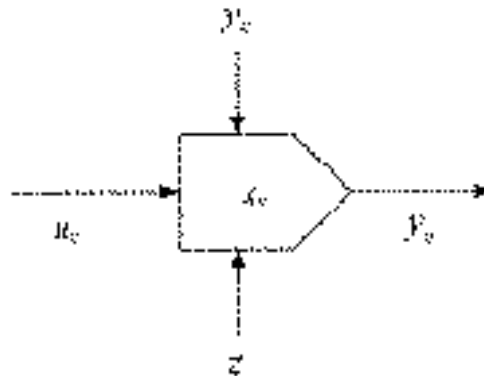
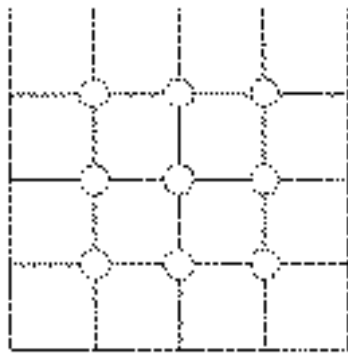
為 $(2d+1) \times (2d+1)$ 的矩陣，稱為模版 (template)； $B = (b_{kl})$ 為控制模版； z 稱為門閥

(threshold) [1]。

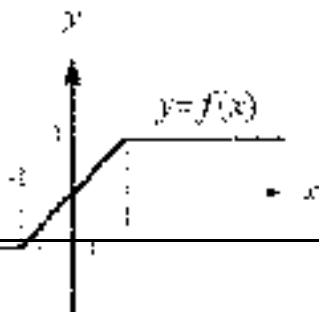
到一九九五年底，細胞類神經網路已經有相當多的工程結果及初步應用，從許許多多的數值模擬結果可看到有趣的現象，蔡教授的研究群也實際做出 30×30 (共九百個神經元) 的實驗成品。但 CNN 的數學基礎有待建立。透過好友周修義兄的介紹，九五年底我見到了來訪的蔡教授。他向我提出一序列待解決的重要問題。因此我就邀本系的莊重，石至文，許正雄，及清大的林文偉一起來研究 CNN。並提出了一個三年期的整合型計畫。研究主題是：

- (1) 研究在不同的參數 $\{z, a_{kl}, b_{kl}\}$ ，系統能產生什麼樣的型 (pattern) 或波 (wave)。
- (2) 研究「學習問題」(learning problem)，給定一組想要的型，如何找到適當的參數來使系統產生所要的型。
- (3) 發展完整的理論及數值方法來處理其複雜性 (complexity) 問題。

由文偉兄主持的計算方面已發展出下列三種軟體，經過多次測試已達到精確、可靠、穩定的程度，受到國際同行的認同。



圖一 細胞類神經網路模型系統之輸出輸入關係圖



圖二 細胞類神經網路模型輸出函數圖

二、研究過程及成果.

由易及難，由簡入繁，本研究訂定下列研究重點：

1. 平衡態問題

主要研究何時有型形成 (pattern formation)，何時有空間混沌 (spatial chaos) 出現。當型的個數是以指數方式隨著神經元個數增加時，稱此系統產生空間混沌現象，反之稱為型形成。因此，要先瞭解局部型 (local pattern) 如何產生變化，接著再研究如何由局部型延拓成全型 (global pattern)，並估計所有全型所形成的空間熵 (spatial entropy)。目前研究成果如下：

- (1) 一維型問題 (Juang and Lin [5]; Lin and Yang [7])。由 transition matrix 的研究，可完全瞭解其複雜性。
- (2) 二維的局部型相當清楚，對大域型形成及空間熵計算尚待努力 (Hsu et al. [4]; Shih [9])。其困難處在於如何由二個一維的 Transition matrix，得到可計算的二維 Transition matrix，去計算空間熵。
- (3) 在模版對稱的情況下，對有限神經元的穩定性問題已獲至完整結果；至於非對稱亦有深入討論 (Lin and Shih [6])。
- (4) 在有限神經元上不同邊界條件對一維空間熵已證明無影響，但在二維上則其影響相當敏感，部分有影響，部分無影響 (Shih [9,10])。

2. 波問題

行進波的存在及多重性已獲得解決，而穩定性問題尚待研究。其他更複雜的波，如螺旋波等需更進一步研究 (Hsu et al. [2]; Hsu and Lin [3])。

3. 計算軟體

- (1) Lyapunov 指數計算。
- (2) 高維度 Poincare 映射計算。
- (3) Fast-Fourier Transform (FFT)

三、檢討

國外研究細胞神經網路的模型的學者皆在電機學界，另一方面數學界亦有相當多的學者研究無限維方程的網路型動態系統 (lattice

dynamical system, LDS)。細胞神經網路模型是一種特殊的網路型動態系統。電機學者的長處在於有應用動機及電路系統的經驗及直覺，並且用電腦模擬出許多重要的結果，但較缺乏基礎性及完整性的研究。國外研究網路型動態系統的數學家所做的研究非常廣泛，經常能建立一些原則性的結果，但亦容易失之空泛。本研究頗能掌握中道：以電機學界的需求為發發展的主軸，來回應真實的世界；又以細胞神經網路的模型來探測其複雜性及其產生的機制，以便抽象出理想化的狀態，較能深入解收相輔相成的效果。

我們的研究成果受到國內外的肯定。今年八月 SIAM 在夏威夷召開的國際會議，本人應邀主持一個 mini-symposium；「網路型動態系統」，而由文偉，至文，正雄及班榮超做專題報告。下一個三年期的整合型計畫，一方面我們要做動態系統的混沌理論研究，另一方面在二維 CNN 的問題也要力求突破。

四、結語

傳統的數學家通常就像藝術家一樣，經常單打獨鬥。他們常在年輕時勤學功夫，也隨時向各種問題挑戰，逐漸建立自己的風格及品味，也在靈感來時試圖在重要問題上有所突破。另一方面，近年來，有些數學家也把數學當作數學科學 (mathematical science)，例如，國外許多著名大學的數學系改名為數學科學系，亦有新成立的數學科學研究所，數學研究已相當注重科學的一面。既是科學，也就要進行觀察、猜測、論證及實驗。要處理複雜的混沌現象，若用傳統的數學方法，單靠紙和筆會覺得無能為力。對數學科學家來說，電腦就是實驗儀器，電腦可用來模擬，用來實驗，讓研究者看到新現象，讓研究者去驗證種種猜測。雖然要很小心留意處理電腦所產生誤差，因此累積出來的效果可能會埋沒或扭曲事實真相。當然，對數學家來說，依邏輯推理的嚴格證明，才是檢驗定理真偽的最後且唯一標準。但可以預期，將來的數學家，在對電腦的功能更加熟悉之後，對某些重要但複雜的數學問題，很可能會把它化成幾千個或幾萬個在電腦誤差範圍內可去驗證對與錯的條件，如同米夏可夫 (Michakov) 前些年在羅倫茲方程的工作，或更早的四色問題。數學家應該可以像一般人一樣，設法用新工具來擴充極深化自己的能力，

把電腦當作自己、眼、及腦的延伸，善加利用。

把數學當作科學，則勢必需要回應外在的真實世界。數學問題來自外界，答案也應當受外界的檢驗。數學的抽象化，只是要抽離出外在世界種種現象的共相，孤立出其最根本的原理、機制或深層結構，再應用到其他特定問題上。數學是用來瞭解這個世界的，從古希臘的追尋「更真實，更理想化」世界，到近代數學家如丘成桐院士所言：「人腦是自然界的一部份，單用人腦去思考畢竟會有乾涸的時候，因此仍需要多多觀照外在的世界。」

把數學當作科學也就更需要團隊合作。一群興趣相同、理念一致、合得來的人，可以一起工作、一起討論、一起成長：在共同研究中，發長出自己的獨特性及創意。在誠懇、開放、互信、互重、善意、友誼的氣氛下，有機會進入同儕的心靈身處漫遊，是人生一大樂事。讓我們繼續去發掘擁有兼備知性及感性的合夥人吧。

參考文獻

- [1] L. O. Chua, *CNN: a paradigm for complexity*, World Scientific Series on nonlinear Science, Series S, **31**, (1988).
- [2] C. H. Hsu, S. S. Lin and W. Shen, *Int. J. Bifur. Chaos*, **9**, 1307 (1999).
- [3] C. H. Hsu and S. S. Lin, (1999), *J. Differential Equations*, (1999).
- [4] C. H. Hsu, J. Juang, S. S. Lin and W. W. Lin, (1998), *Cellular neural networks: local patterns for general template*, *Int. J. Bifur. Chaos*, (1998).
- [5] J. Juang and S. S. Lin, *SIAM J. Appl. Math.*
- [6] S.S. Lin and C. W. Shih, *Int. J. Bifur. Chaos*, **9**, 909 (1999).
- [7] S. S. Lin and T. S. Yang, *Int. J. Bifur. Chaos*, (1999).
- [8] W. W. Lin, C. C. Peng and C. S. Wang, *Int. J. Bifur and Chaos*, (1999).
- [9] C. W. Shih (1998), *Int. J. Bifur. And Chaos*, **8**, 1907 (1998).
- [10] C. W. Shih, *SIAM J. Applied Math.*, (1998).