

雙有理幾何學之 K-等價關係

清華大學數學系 王金龍

一、雙有理幾何學簡史

兩個代數流形互為雙有理倘若它們各有一個同構的 Zariski 開集。這個觀念等價於說它們有同構的有理函數體。雙有理幾何學的主要課題之一在於尋找一個最佳的幾何模型以利代數流形或其函數體的研究。這個想法在二十世紀初期就已經為意大利幾何學派所採用並且成功地將代數曲面進行分類。這就是著名的 Enriques 分類。而這裏所被採用的最佳幾何模型便是所謂的極小模型。它的大意是說，倘若一個光滑曲面包含了一條具有正曲率的射影直線，則該直線可被光滑地收縮成點而得到一個簡化的光滑曲面。這是所謂的 Castelnuovo 定理。當我們重覆這個過程，最終便獲致極小模型。在大多數情形下，極小模型具有非正曲率並且唯一。這是其有用的主因。

之後一段相當長的時間，幾何學家們一直無法將極小模型的理論推廣到高維度的空間。直到 1980 初期，Mori 證明了 Castelnuovo 收縮定理在三維空間的推廣後，整個理論才燃起了延續的希望。Mori 證明若是一個三維代數流形沿著其內部的某條曲線上具有正曲率，則我們必然能夠找到一條或一簇可收縮的射影直線。他並且分類了所有可能的收縮款式。異於二維的情況是，經收縮後的簡化空間在一般的情形下必然含有奇異點。所幸這類奇異空間上相對應的 Mori 收縮定理很快地就被 Kawamata 和 Shokurov 證明並推廣到高維度的空間。而不幸的是更壞的奇異點也因而產生。三維的極小模型理論中最為驚人且困難的步驟便在於透過一種稱為 flip 的特殊手術過程以避該開那些導致更壞奇異點產生的收縮過程。三維空間中 flips 的存在性於 1988 為 Mori 所證明，而三維的極小模型理論也因此建立。

在一般維度的空間裏，至今尚無任何方法能明 flips 的存在性。並且縱使在三維的情形，極小模型也沒有唯一性。建立在 Reid 和 Mori 對於三維奇異點的分類結果下，Kollár 和 Mori 在 1992 徹底了解了相異的三維雙有理極小模型

之間的精確關係。它是由一系列所謂 flops 的特殊手術過程組合而成的。每一個 flop 均是移除空間中一條零曲率的射影直線再將此射影直線以另一種方式植入原空間。他們完成了三維 flops 的分類，並因而證明了三維雙有理極小模型們雖非拓撲同倫，它們卻都有自然同構的 (intersection) 同調群，intersection 純 Hodge 結構，局部奇異點以及局部模空間。這些結果使三維的極小模型理論因而完備且實用。

二、K-等價關係與 Motives

筆者於 1995 [1] 開始研究 Calabi-Yau 流形的模空間理論，其上的 Weil-Petersson 幾何以及其退化問題。運用上述的 Mori 理論，筆者造出了三維的“填入問題”的反例。即我們可以找到一個單連通的複三維 Calabi-Yau 流形及其一簇在單位圓盤上的代數退化簇，使得其在原點外的子簇是在微分流形意義之下的直積 -- 亦即可以將原點上的奇異 Calabi-Yau 曲體置換成一個實六維的光滑流形而得到單位圓盤上的實光滑簇，但是卻可證明無法在代數流形的範疇下將其置換成一個代數光滑簇。這個證明之中最重要的步驟之一是三維的雙有理 Calabi-Yau 流形們均具有相同的 Betti 數。這個研究過程促使筆者去思考這件事在高維度時是否仍是對的！?

一個天真但極令人振奮的想法是應用退化 Kähler 度量及 L^2 上同調群。即我們在欲比較的兩個 Calabi-Yau 流形上各取一個 Kähler 度量，將它們拉回到其雙有理對應的某個光滑模型上，則得到兩個具有等價體積元的退化 Kähler 度量。如果我們能將其中一個退化度量保持等價體積地“旋轉”至另一個，則 L^2 上同調群的理論就能推出一般上同調群的等價性。很可惜地這個想法至今筆者仍有一些分析學上的困難未能解決。然而筆者從中淬取出一個概念：雙有理幾何學之 K-等價關係！我們只須假設兩個雙有理流形具有等價的第一陳示性類 (first chern class, 或 $-K$, K 為典型線叢)，就能推出其具有等價的退化體積元，而這應就足以推

出同調群的等價性。事實上利用 Hodge 指標定理不難證明若兩個雙有理流形在其不同構的閉子集上具非正曲率，則它們為 K -等價。這不但證明雙有理極小模型的 K -等價性，亦說明了 K -等價為 flops 在高維度的精確抽象化。

筆者於 1997 將等價體積的想法運用在 p -進數積分法上。這時計算體積會等價於計算該代數流形在模 p 下的有限體裏解的個數。利用算術代數幾何學的模 p 技巧及 Grothendieck-Deligne 關於 Weil 猜想的結果，終於獲得了 K -等價流形均具有相同的 Betti 數的嚴格證明。(1997 稍早 Batyrev 也在 Calabi-Yau 的情形得到了相同的結果。) 在 1998 正式發表的文章 [2] 中，適逢 Denef 與 Loeser 發表了他們關於 motivic 積分法的重要工作。與 Loeser 的聯繫中我們立即了解到若是採用 motivic 積分，則同樣的證明方法加上 Deligne 關於一般代數曲體的上同調群存在混合型的 Hodge 結構的定理，便能將結果改進為 Hodge 數的等價性。這個證明亦收錄在 [2] 裏。

事實上，筆者利用 Weil 猜想的原始證明已證出除了有限個質數之外， K -等價流形具有相同的 zeta 函數。依照數論中 Galois 表示論與 motive 理論間的應有對應關係，我們應當已可推出 K -等價流形具有相同的 motive。具體而論，依照 Faltings 在 1990 所證明的 p -進數 Hodge 理論， K -等價流形具有相同的 p -進數 Hodge 結構。這個論證在 1999 筆者訪問翟敬立 (Chai 於賓州大學) 時已成形。然而此論證的盲點在於 zeta 函數僅能決定其 Galois 表示的 semi-simplification。除非我們假設 Galois 表示論裏熟知而極困難的 semi-simplicity 猜想，否則我們似乎很難嚴格地證明什麼。很高興地，在 2000 秋季一次與理論中心訪問學者于如岡 (Yu 於普林斯頓大學) 的討論中，我們了解若只想證明 Hodge 數的相等，在使用 Faltings 的理論時亦只須 semi-simplification 下的訊息。因此我們有了 Hodge 數等價的另一個嚴格證明。

三、 K -等價關係與複橢圓虧格：弱擾動分解定理

從積分理論出發的證明有一個盲點：結論多為數值的，很難有具幾何本質的結果。例如雖然 K -等價流形具有相同的 Betti 數，我們卻不知道上同調群之間是否存在一個典型的同構！在三維時，Koll'ar 和 Mori 對於雙有理極小模型

間的有理映射均可分解為 flops 的結果可以直接推廣至任兩個三維 K -等價流形。因此前述上同調群的自然同構，等價的 Hodge 結構以及局部模空間等性質都依然成立。並且這些典型的同構都是由其雙有理對應的閉鍊所誘導出來的。但顯然地我們難以從積分理論得出這些結果。

在高維度的情況，由於奇異點的分類問題幾乎不可能解決，flops 的存在性問題似乎是太難了。筆者對於這個問題的看法是，我們不應將 K -等價的分解問題限制在代數幾何學的範疇。我們應允許 symplectic 擾動！在三維時，利用奇異點的分類我們可以證明：倘若允許 symplectic 擾動，則 K -等價流形間的有理映射均可分解為“古典的 flops”。所有我們感興趣的自然同構在這個擾動分解下幾乎都成了極簡單的推論。只可惜我們不知如何不經由奇異點的分類而直接證明此擾動分解定理。事實上，擾動分解定理比代數幾何範疇的 flop 分解定理更好用：Ruan 和 Li 在 1998 宣稱可以透過它來證明量子上同調環的等價性。(注意普通的上同調環之環結構在 flop 下並不保持。)

在 2000，筆者做了一系列關於 K -等價流形的大膽猜想：

- I. 其雙有理對應的閉鍊誘導出其上同調群之間的典型同構並且保持 Hodge 結構。
- II. 它們有典型同構的局部模空間。
- III. 它們有典型同構的量子上同調環。
- IV. 擾動分解定理：在一般的 symplectic 擾動下，它們之間的有理映射均可分解為有限個古典的 P^r flop 的合成。

而且指出 IV 將是解決 I, II 和 III 的關鍵步驟。

筆者在 2001 [3] 的文章中的主要結果是證明了猜想 IV 的一個弱形式：倘若允許“複-cobordism”，則 K -等價流形之間的有理映射均可分解為有限個古典的 P^1 flop 的合成。我們應注意由於 specialization 下維數不能降低，原猜想中的 r 必然不能只取 1。這也說明了我們所證的弱形式距離 IV 仍然有一段距離。另一個附記是關於 Mukai flops。筆者未將其列入猜想 IV 中是因為 Huybrechts 在 1996 證明了 Mukai flops 在一般的 symplectic 擾動下會消失不見。最近 (2001) 他更進一步證明了雙有理的 hyper- K -ähler 流形在一般的複結構擾動下會變成同構。這個結果亦可視為以上猜想的重要證據之一。

關於弱擾動分解定理的證明，我們注意到

根據 Milnor 的一個定理，一個緊緻複流形的複-cobordism 等價類是由其所有的陳示性數 (chern numbers) 所決定。Tataro 最近證明了在所有 P^1 flops 下都保持不變的陳示性數恰為所謂的"複橢圓虧格"。筆者主要的貢獻在於證明事實上複橢圓虧格對任何 K -等價流形亦是不變的。證明中最重要的一步仍是推導虧格或陳示性數在 blowing-ups 下的換變數公式。最後筆者使用 Włodarczyk 最近所證明的弱分解定理將一般的雙有理映射簡化到 blowing-ups 的情形以完

成證明。值得一提的是，除了最後一步，此證明在複流形的範疇與一般體的代數流形範疇都成立。筆者希望在未來能用 Grothendieck-Riemann-Roch 定理取代弱分解定理，以得到更圓滿的結論。

參考文獻

- [1] -----*Math. Res. Let.*, **4**, 157 (1997).
- [2] -----*J. Differential Geometry*, **50**, 129 (1998).
- [3] -----to appear in *J. Algebraic Geometry*.