

[研究新領域報導]

辛幾何與西表現

國立交通大學應用數學系 蔡孟傑

我們在微積分學過，對光滑函數 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，任取一點 p 於 $\mathbb{R}^n$ ，可計算 f 的微分並得其 Jacobian 矩陣 $f^*(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。儘管微分的過程損失 f 的一些資料，但 f^*_p 具有線性轉換的特性，這使得 f^*_p 反倒比 f 易於瞭解(f 只是光滑函數，不見得為線性)，所以我們還是常用 $f^*(p)$ 來推測 f 在 p 附近的特性。反函數定理即為一例。

現在我們把 f 特定為光滑型 M 上的微分同胚(diffeomorphism)，則 f^* 就成了 M 上的幾何物件(如向量場，上同調，微分形式等)的線性轉換。一些流型 M 具有高度對稱性，即 M 的微分同胚群 $D(M) = \{f: M \rightarrow M; f \text{ 微分同胚}\}$ 很大。我的研究即著眼於某一些群(「李群」) G 與群同態(group homomorphism) $f: G \rightarrow D(M)$ 所衍生的數學結構及物理意義。如上一段所述，我們常用線性的 $f^*(g)$ 來理解非線性的 $f(g): M \rightarrow M$ 。事實上，這套手法導出了數學家利用群表現來瞭解群作用，或是用李代數來探討李群的哲學。

李群一詞源於挪威大數學家李氏(Sophus Lie, 1842-1899) [4]。簡單說來，李群同時具有光滑流型及群的特性，此外群的運算放在幾何架構下亦光滑。李群 G 的作用於流型 M 為一個群同態 $f: G \rightarrow D(M)$ 。比方說，若 H 為 G 的閉子群，而 $M = G/H$ ，則 G 於 M 的左乘運算導至 $G \rightarrow D(M)$ 。

令 V 為某一向量空間， $A(V)$ 為所有自同構(automorphism) $V \rightarrow V$ 所組成的群。李群 G 的表現即是群同態 $\pi: G \rightarrow A(V)$ 。此外，若 V 在 π 的作用下保有不變的內積，則此表現 π 又被稱為西表現。

另一方面，若 $\pi: G \rightarrow A(V)$ 的子表現(subrepresentation)只有 0 和 V ，則 π 被稱為不可約(irreducible)表現。E.Cartan 和 H.Weyl 的成就之一就是將所有緊緻李群的不可約表現分類。這分類是由一些 lattice 點標明，並將之命名為不可約表現的 highest weight。例如： $SU(2)$ 的不可約表現即由 $\{0, 1, 2\}$ 標明。給定某一

表現，我們就可計算其不可約表現在其出現的次數。這就像任何一個自然數，我們可計算其某質數在該自然數出現的次數(如 $75 = 3 \cdot 5^2$ ，所以 5 在 75 出現 2 次)。

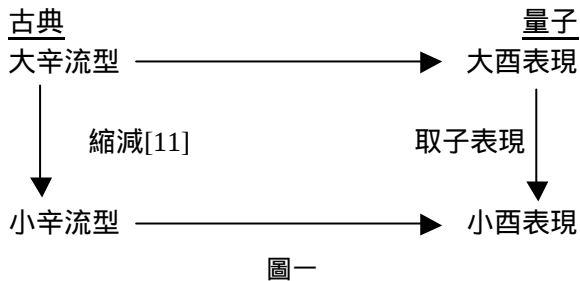
令 $V(M)$ 為流型 M 的某些幾何物件，如向量場，上同調，微分形式等。從群的作用 $f: G \rightarrow D(M)$ ，可得群的表現 $f^*: G \rightarrow A(V(M))$ 。要把 f^* 變成西表現，需在 M 附上 G 不變的辛(symplectic)結構。將 G 不變辛流型 M 轉換成 G 的西表現，並考慮某個不可約表現出現的次數，這正是幾何量化(geometric quantization)[9]的起點。但很多幾何物件卻因太大而不適用於此計畫，若硬套用，也會造成不可約表現出現太多次。針對此現象，我們附加一些條件，稱為 polarization，並令 $H(M)$ 為 $V(M)$ 裡滿足此附加條件的元素。例如當 M 是複空間時， $V(M)$ 可為光滑函數並 $H(M)$ 為全純函數。

幾何量化的物理動機如下。因為古典力學的研究常涉及餘切叢(cotangent bundle)(如 Hamilton-Jacobi 方程式)，而餘切叢是最重要的辛流型之一(另一個是李群的共伴隨軌道 coadjoint orbit)，所以辛流型俗稱為「古典現象」。另一方面，西表現在量子物理有廣泛應用，俗稱為「量子現象」。例如， $O(3)$ 在球面 S^2 的標準作用提供 $O(3)$ 於 $L^2(S^2)$ 的西表現，而在此的調和分析可導至氫原子的 Schrodinger 方程式的解。因此，幾何量化是將古典現象轉換成量子現象的過程。

透過幾何量化，我們可以從辛流型 M 構造各種有趣的西表現 $H(M)$ 。例如，共伴隨軌道 M 通常導至不可約西表現。很多類共伴隨軌道與不可約西表現有一對一的對應，這就是「軌道方法」[13]的想法。Gelfand 與 Zelevinski [5] 建議研究一類稱為「模型」的西表現。 G 的模型即是各種不可約表現各出現一次的西表現。我個人在[1]就是用幾何量化的方法構造了緊緻李群的模型。

古典與量子現象常滿足的一個原則是「幾何量化與縮減過程可交換」(geometric

quantization commutes with reduction)[6]。亦即在很多情況下，在古典現象中把辛流型縮減[11]相當於在量子現象中取子表現，形成下列交換圖：



延續[1]在緊緻半單李群的工作我發現它符合圖一的交換圖[3]。此情況中，圖一左下角是旗流型，在它的複結構下，辛形式成偽 kahler。右下角則是旗流型的 Dolbeault 上同調。圖一幫我們研究偽 kahler 的 signature，而答案與圖一右下角的消失有關。

至於非緊緻李群，因為它們的不可約西表現還未完全分類，所以模型的概念就不那麼明確了。此時，我們只能針對某一類的不可約西表現。例如，如果 G 是半單(semisimple)並有緊緻 Cartan 子群，則一個重要的類別即是全純離散級數(holomorphic discrete series)[7]。在此情形，我定義全純離散模型為各全純離散數各出現一次的西表現。在[2]，我用幾何量化的方法構造此模型。

在此提供些研究題材。非緊緻半單李群有三類共伴隨軌道：橢圓(elliptic)，雙曲(hyperbolic)，以及 nilpotent。「軌道方法」便是計畫用這些軌道來構造西表現。其中，前兩類軌道有以下方法：

軌道	西表現	構造方法
橢圓	離散級數	複線叢[12]
雙曲	主級數	induced 表現[10]

圖二

我在[2]的工作即是建立在橢圓軌道與離散級數的關係(圖二的第一行)，因此我們或許可以用雙曲軌道來構造一個由主級數(principal series)組成的西「主模型」(圖二的第二行)。另外，第二行用到的 induction，可適用於古典現象[8]及量子現象[10]。我想應能得到一些「幾何量化與 induction 可交換」的有趣結果。

參考文獻

- [1] M.K. Chuah, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**, 3373 (1997).
- [2] M.K. Chuah, *J. Funct. Anal.*, **175**, 17 (2000).
- [3] M.K. Chuah, *Amer. J. Math.*, **122**, 991 (2000).
- [4] B. Fritzsche, *J. Lie Theory*, **9**, 1 (1999).
- [5] I.M. Gelfand and A. Zelevinski, *Funct. Anal. Appl.*, **18**, 183 (1984).
- [6] V. Guillemin and S. Sternberg, *Invent. Math.*, **67**, 515 (1982).
- [7] Harish-Chandra, *Acta Math.*, **116**, 1 (1966).
- [8] D. Kazhdan, B. Kostant and S. Sternberg, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**, 481 (1978).
- [9] B. Kostant, *Springer Lecture Notes in Math.*, **170**, 87 (1970).
- [10] G. Mackey, *Annals Math.*, **55**, 101 (1952).
- [11] J. Marsden and A. Weinstein, *Rep. Math. Phys.*, **5**, 121 (1974).
- [12] W. Schmid, *Annals Math.*, **103**, 375 (1976).
- [13] D. Vogan, *IAS/Park City Math. Series.*, **8**, 177 (2000).