

倍正則映射與相關問題

中正大學數學系 陳榮凱

代數流形上的因子(divisor)和線性系(linear series)是研究代數幾何最基本的工具之一。給定一個因子相當於給定一些零點和極點以及上面的重數，我們可以進一步考慮具有這些零點和極點的有理函數，透過這些有理函數有一個到射影空間的映射，射影空間上的超平面及對應到這個因子的線性系。而且任何到射影空間的映射皆可以透過因子來了解。我們的研究是在這樣的基礎上探討流形間的映射以及分類的一些問題，這其中包含了以下幾項息息相關的主題，第一項是倍正則映射(pluricanonical maps)，第二項是雙有理不變量(birational invariant)。

任給一個平滑的代數流形，上面都有自然的正則因子以及倍正則因子，當它們的線性系非空時，則可以定義倍正則映射。已知當倍數夠大時，其映像有一個固定的雙有理模型，此時映像的維度定義為小平維度(Kodaira dimension)，其中小平維度等於流形維度的代數流形我們稱為常態。對於常態流形，我們希望能對倍正則映射的倍數有所控制。對於維度是 1 和 2 的常態流形，倍數分別取 3 和 5 即可[1]，至於更高維度的常態流形，一般來說是不清楚的。

我們有一部分的成果是在討論具有極大阿柏尼西維度的常態流形，我們發現此時倍數可以小於 $5n+1$ ，其中 n 代表流形的維度[3]，對於非常態但小平維度大於 0 的流形，則可以取倍數小於 $6k+2$ 其中 k 代表流形的小平維度。這些結果主要是透過偏倍正則因子的研究而得到的，偏倍正則因子可以視為倍正則因子的一種形變(deformation)，所以兩者之間的線性系的基點(base point)會有相當密切的關係。更進一步來談，倍正則因子的線性系的基點可以分成隨著形變而變動的部份以及不動的部份，其中不動的部份可以被倍數小的倍正則因子所控制，掌握了這不動的部份，我們便能夠掌握倍正則因子的線性系的基點以及倍正則映射的許多現象。

在分類理論中，通常我們希望取一些適當的不變量，利用這些不變量對感興趣的幾何物

件做分類。或者更進一步，利用這些不變量來刻劃幾何物件。對於代數曲線，利用虧格數(genus)就完全分類了所有的雙有理模型，至於代數曲面，利用倍虧格數(plurigenus)和 irregularity q 就可以有 Enriques 分類。對於高維流形，一般來說，只能預期對少數重要的流形來做刻劃。川又雄二郎(Y. Kawamata)有個有名的結果是說[6]：若一個複射影流形的小平維度等於 0 且 q 等於流形的維度，則該流形雙有理到阿貝爾流形。小平維度雖然是相當常用的一個雙有理不變量，然而任給一個代數流形，決定其小平維度一般來說是困難的，必須對倍虧格數和倍正則映射有相當多的了解才有可能。例如上述川又雄二郎的條件等同於所有的倍虧格數等於 1 且 q 等於流形的維度。之後許多知名的數學家如 Kollár, Ein and Lazarsfeld 等，嘗試利用一兩個小的倍虧格數和 q 來刻劃阿貝爾流形[5,7]。在[2,4]中，我們給出一個最簡的刻劃：若一個複射影流形的第二虧格數等於 1 且 q 等於流形的維度，則該流形雙有理到阿貝爾流形。對於一個小平維度等於 0 的平滑流形，它的阿柏尼西映射一定是蓋射，且映像是阿貝爾流形。若 q 等於流形的維度，則阿貝爾流形的維度等於流形的維度，並且在扣除小部分的點之後，阿柏尼西映射形成一個分歧覆蓋。我們的方法是證明一個更強版本的蓋射定理，然後利用消沒定理討論分歧覆蓋可能的分歧刻痕，並證明此時分歧刻痕事實上是不存在的。然而阿貝爾流形的非分歧覆蓋還是阿貝爾流形，所以原先考慮的複射影流形和阿貝爾流形是雙有理的。

事實上，對於小平維度等於 0 但是 q 小於維度的流形，有一個關於這類流形的結構的一個猜想，基本上是說這種流形均是由阿貝爾流形和 q 等於 0 的流形透過雙有理映射和非分歧覆蓋所產生。對於這方面的問題，我們有部份的結果：若正則因子映至阿柏尼西流形不是蓋射，則此猜想成立。這其中主要是牽涉到正則因子的性質，如果正則因子映至阿柏尼西流形不是蓋射，在阿柏尼西流形上有一個因子對應

到原來流形上的正則因子。計算正則因子和對應因子的上同調群，並透過 Mukai 變換，可以證明對應因子是撓因子，適當倍數以後是個零因子，如此便證明原來流形是個最小模型。一個已知的事實是最小模型可以保證猜想成立。

我們所探討的研究方向和最小模型理論及飯高猜想(Iitaka Conjecture)有極密切的關係，透過 Mukai 變換的一些應用以及偏倍正則因子的線性系的分析，我們有幸得以解決部分問題，然而關於 Mukai 變換及偏倍正則因子的研究，可說是還在起步的階段，這一切都還有待更多的探討。

參考文獻

[1] E. Bombieri, *Inst. Hautes Études Sci. Publ.*

Math., **42**, 171 (1973).

[2] J. A. Chen and C. D. Hacon, *Invent. Math.*, **143**, 435 (2001).

[3] J. A. Chen, C. D. Hacon, *to appear in Math. Annalen* (Preprint math.AG/0005187, 2000).

[4] J. A. Chen, C. D. Hacon, *to appear in Duke Math. Jour.* (Preprint math. AG/0011042, 2000).

[5] L. Ein and R. Lazarsfeld, *Jour. AMS*, **10**, 243 (1997).

[6] Y. Kawamata, *Comp. Math.*, **43**, 253. (1981).

[7] J. Kollár, *Invent. Math.*, **113**, 177 (1993).