[研究成果報導]

Lévy 泛函的 Segal-Bargmann 變換

國立高雄大學應用數學系　李育嘉

無窮變數的廣義函數論，在高斯泛函（或稱布朗泛函）方面的研究主要有兩種方法，一是Malliavan的方法(俗稱Malliavan Calculus)，一是 Hida 的方法（俗稱 Hida Calculus 或白噪聲分析(White Noise Analysis)）。本報告採用後者的研究方法。Hida 的方法主要工具是利用 Segal-Bargmann 變換〈簡稱 S-變換〉來分析布朗泛函之性質。今簡介如下：

令 S 表 Schwartz 空間，其對偶空間 S'即所謂溫和廣義函數空間。由 Minlos 定理吾人知存在唯一之測度 μ，定義於 (S', B(S'))上且其特徵函數 $C(\xi), \xi \in$ S 爲

$$C(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(t)^2\,dt\right\}. \tag{1}$$

吾人稱測度 μ 爲高斯測度。令 B(S')表 S'上的 Borel 代數，則 (S', B(S'), μ) 形成一機率空間．對於任何一 $\xi \in$ S，令 $\tilde{\xi}(x) = (x, \xi)$，則 $\tilde{\xi} \in (L^2)$且 $\tilde{\xi} \sim N(0, |\xi|^2)$ ($|\cdot|$ 表 L^2(R)的範(norm))。

對於任一 $h \in L^2$(R)，選一序列$\{\xi_n\} \subset$ S 使得$|\xi_n - h| \to 0$，吾人便定義

$$\tilde{h} = (L^2) - \lim_{n\to\infty} \tilde{\xi}_n .$$

顯然，$\tilde{h} \in (L^2)$且 $\tilde{h} \sim N(0, |h|^2)$。吾人也常用$\langle\cdot, h\rangle$來表 $\tilde{h}$ 。用此定義，布朗運動 $\mathbf{B}=\{B(t) : t\in \mathrm{R}\}$可表成

$$B(t;x) = \begin{cases} \langle x, 1_{[0,\,t]}\rangle, & \text{if } t \ge 0; \\ -\langle x, 1_{[t,\,0]}\rangle, & \text{if } t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

此表示對幾乎所有 $x\in$ S'皆成立。

定理一〈Wiener-Itô 定理〉**：** 令 $L^2(\mathrm{R}^n)$表 R^n 上平方可積之函數集合，$\hat{L}^2(\mathrm{R}^n)$表 $L^2(\mathrm{R}^n)$之中對稱函數所形成的子空間。給予$\varphi \in \hat{L}^2(\mathrm{R}^n)$，$I_n(\varphi)$表 φ 之 Wiener n−重積分，即

$$I_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\,dB(t_1)\ldots dB(t_n)$$

給與任一函數 $f \in (L^2) = L^2(\mathrm{S}',\mu)$，則存函數列 $\{f_n : f_n\in \hat{L}^2(\mathrm{R}^n)\}$使得$f$可唯一表成 $I_n(f_n)$ 之正交直和：

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\oplus\, I_n(f_n)$$

且有

$$\|f\|_{(L^2)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|f_n|_{L^2(R^n)}^2。$$

定義 S-變換如下：$\forall\varphi \in \hat{L}^2(\mathrm{R}^n), \xi \in$ S

$$S(I_n(\varphi))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{\infty}^{\infty}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\xi(t_1)\ldots\xi(t_n)\,dt_1\ldots dt_n.$$

吾人可證明：$\forall f \in (L^2)$

$$\begin{aligned} S(f)(\xi) &= \int_{S'} f(x+\xi)\mu(dx) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}\int_{S'} f(x)e^{(x,\xi)}\mu(dx), \end{aligned} \tag{3}$$

上式中，$(\cdot, \cdot)$表(S', S)序對。(3)式導至以下廣義布朗泛函的定義：

令 E 試函數空間(test functionals)，通常 E 爲L_c^2(R) (L^2(R)的複化空間(complexification))上的解析函數，$\{\exp(\cdot, \xi) : \xi \in \mathrm{S}\} \subset E \subset (L^2)$，其本身爲拓樸代數且 $E \to (L^2)$爲連續。E 的對偶 E^*裡的元素便稱爲廣義布朗泛函。E^*−E 序對記作《·, ·》。利用試函數之 S-變換，吾人可定義並研究廣義布朗泛函。茲舉兩例說明之，其他例子請參見[1,2]。

例一、令 $t>0$。表 $B(t)=\widetilde{1}_{[0,t]}$，則

$$\langle\langle B(t),\varphi\rangle\rangle = D_{1_{[0,t]}}(S\varphi)(0),\quad \varphi\in E$$

上式中 $D_h f(x)$表 f 在 x 點 h 方向之 Fréchet 微分。

利用上式，吾人定義高斯白噪聲 $\dot{B}(t)$ 如下：

$$\langle\langle \dot{B}(t),\varphi\rangle\rangle = D_{\delta_t}(S\varphi)(0),\quad \varphi\in E.$$

例二、 給予 $f\in$ S' 及 $0\neq h\in L^2(\mathrm{R})$ 定義 f 與 $\widetilde{h}$ 之合成函數 $f(\widetilde{h})$ 如下：

$$\langle\langle f(\widetilde{h}),\varphi\rangle\rangle = (G_{h,\varphi},\hat{f}),\quad \varphi\in E.$$

上式中$(\cdot,\ \cdot)$表 S'–S 序對，$\hat{f}$ 表 f 的 Fourier 變換,

$G_{t,\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2\|h\|_0^2)}S\varphi(iuh)$ 。

由以上定義，當 $t\neq0$ 時，$f(B(t))$可被定義成

$$\langle\langle f(B(t)),\varphi\rangle\rangle = (G_{t,\varphi},\hat{f}),\qquad (4)$$

上式中 $G_{t,\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2t)}S\varphi(iu1_{[0,t]})$ 。

對(4)式中之變數 t 微分，吾人即導出廣義 Itô 公式

$$\frac{d}{dt}\langle\langle f(B(t)),\varphi\rangle\rangle =$$

$$\langle\langle \partial_t^* f'(B(t)),\varphi\rangle\rangle + \frac{1}{2}\langle\langle f''(B(t)),\varphi\rangle\rangle,$$

上式中$\partial_t = D_{\delta_t}$，$\partial_t^*$爲$\partial_t$之共軛算子。

在非高斯泛函之研究方面，Y. Ito，沿用 Hida 的方法藉著 U-變換來研究 Poisson 泛函，其功能與 Hida 早期所使用之 T-變換之角色相似，但與目前使用之 S-變換之角色則有所不同（見[3]所引用之相關參考資料）。

什麼是 Poisson 泛涵的“S-變換”？

令$\{N(t),\ t\in\mathrm{R}\}$爲一 Poisson 過程，$P$ 表 Poisson 機率測度，其特徵函數爲

$$\int_{S'} e^{i(y,\eta)}P(dy) = e^{\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\eta(t)}-1]dt}\quad (\eta\in \mathrm{S})$$

(S',B(S'),P)爲 Poisson 機率空間。與布朗泛函的情形類似，Poisson-Itô 定理也成立，因此任一$\varphi\in L^2$(S',P)也可被寫成隨機過程 $N(t)-t$ 的 $n-$重積分 $I_n^P(\cdot)$ 之正交直和：

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\oplus I_n^P(\phi_n).$$

如同布朗泛函的情形，吾人定義 Poisson 過程之 Segal-Bargmann 變換 S_P如下：

$$S_P(\varphi)(\xi) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\xi(t_1)\ldots\xi(t_n)dt_1\ldots dt_n.$$

吾人也可證明 S_p 可以以表示下公式表示之：

$$S_P\varphi(g) = \int_{S'}\varphi(y)\cdot e^{-\int_{-\infty}^{\infty}g(t)+<y,\mathrm{Log}(1+g)>}\ P(dy).$$

如同例一與例二，吾人只要以 P 取代μ，S_P取代 S 並重新定義 Poisson 微分爲 ∂_t $=S_P^{-1}D_{\delta_t}S_P$，吾人也可用類似公式定義 Poisson 白噪聲並且導出 Possion-Itô 公式。

文章最後我們討論 Lévy 泛函之 Segal-Bargmann 變換。首先吾人簡介 Lévy 過程：

設(Ω, M, P)爲一機率空間，($X(t)$; $t\in$ R)爲一隨機連續之可加過程（即具有獨立增量之隨機過程是也），其增量 $X(t)-X(s)$ $(t>s)$之特徵函數

$$\psi_{st}(r) = E[e^{ir(X(t)-X(s))}])$$

滿足下式：

$$\psi_{st}(r) = e^{(t-s)f_X(r)},\qquad (5)$$

上式中 $f_X(r)$界定如下：$\forall\ r\in$ R

$$f_X(r) = i\mu r - \tfrac{1}{2}\sigma^2 r^2 +$$

$$\int_{\{|u|>0\}}\left(e^{iru}-1-\frac{iru}{1+r^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}d\beta(u),\qquad (6)$$

(6)式中μ爲一常數，β爲一右連續函數且滿足

$\beta(-\infty)=0$，$\beta(+\infty)<\infty$及$\sigma^2=\beta(0)-\beta(0-)$等性質。

本研究報告只考慮滿足 $X(0,\omega)=0$ a.e. 之 Lévy 過程，一般情形請參見[3]。

當 β 滿足以下條件時：

$$\int_{-\infty}^{\infty} | u | d\beta(u) < +\infty$$

吾人知存在唯一定義於(S',B(S'))上之測度Λ，其特徵函數 C(η), $\eta \in$ S 爲：

$$C(\eta) = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\eta(t))dt \right\}. \tag{7}$$

利用類似表示布朗運動的建構方法，Lévy 過程 $X(t)$在(S',B(S'), Λ)可表爲

$$X(t;\, x) = \begin{cases} \langle x, 1_{[0,t]} \rangle, & 若\, t \geq 0; \\ -\langle x, 1_{[t,0]} \rangle, & 若\, t < 0, \quad a.e.(\ ). \end{cases} \tag{8}$$

給予任一函數 $\varphi \in L^2$(S', Λ)，由 Itô 定可知存在 $\phi_n \in L^2((R^2)^n, \lambda^{\otimes n})$ 使得φ可被唯一表示爲 Lévy-Itô n-重積分 $I(\phi_n)$ 之正交直和，此處

$$I(\phi_n) =$$

$$\int_{R^2} \cdots \int_{R^2} \varphi_n(t_1, \ldots, t_3) dM(t_1) \ldots dM(t_n),$$

式中 $d\lambda = dt \otimes (1+u^2) d\beta(u)$ 而 M 爲一隨機測度。

在 L^2(S', Λ) 上定義 Lévy 泛函的 Segal-Bargmann 變換 S_L 如下：$\forall \varphi \in L^2$(S', Λ)

$$S_L\varphi(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{R^2} \cdots \int_{R^2} \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$g(x_1) \cdots g(x_n) d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_n),$$

爲了表 $S_L\varphi$ 成 S'上對於Λ之積分形式，吾人首先定義 $\varphi \in L^2$(S', Λ) 之 J-變換如下：

$$J\varphi(\xi) = (E[e^{I_1(\xi)}])^{-1} \int_{S'} \varphi(y) \cdot e^{I_1(\xi)(y)} \Lambda(dy), \tag{9}$$

式(9)中 $I_1(\xi) = \int_{R^2} \xi(x) dM(x)$ 。

J-變換即布朗泛函之 S-變換而且是 Poisson 泛函之 U-變換。利用 J-變換吾人便可導出 S_L-變換，二者之關如下：

$$S_L\varphi(g) = J\varphi(\xi), \tag{10}$$

上式中 $g(t,u) = \dfrac{e^{u\xi(t,u)} - 1}{u}, (t,u) \in R^2$ 。

最後吾人就利用關係式(10)導出 $S_L\varphi$之積分表示式，敘述如下：

定理二: 給予 $\varphi \in L^2$(S', Λ) 及 $g \in \Re =$
$\{g \in L^2(R^2, \lambda) : g^* \in L_c^1 \cap L_c^\infty(R_*^2, \nu)\}$,
$S_L\varphi$ 有以下積分表示：

$$S_L\varphi(g) = \int_{S'} \varphi(x) \gamma_g(x) \vartheta_g(x) \Lambda(dx)$$

上式中

$$\gamma_g(x) = \exp\left\{ -\int_{R^2} g^*(s) d\nu(s) \right\} \cdot$$

$$\prod_{t \in J_X(y)} [1 + g^*(t, X(t;x) - X(t-;x))],$$

$$(g^*(t,u) := ug(t,u), \forall (t,u) \in R_*^2,$$

$$J_X(x) = \{t \in R : X(t;x) - X(t-;x) \neq 0\})$$

$$\vartheta_g(x) =$$

$$\exp\left\{ -\tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t,0)^2 dt + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} g(t,0) dB(t;x) \right\},$$

($x \in$ S').

例三、 設 **X**=**P** 爲 Poisson 過程，則Λ=P，$\mu = \frac{1}{2}$ 且$\beta = \frac{1}{2} 1_{[0,\infty)}$ 。在此情形下 L^2(R^2,λ) = L^2(R,dt)。又當 $g \in$ S $\subset L^2$(R,dt)時，應用定理二，吾人可得 $\vartheta_g \equiv 1$ 且

$$S_L\varphi(g) =$$

$$\int_{S'} \varphi(y) \cdot e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt + <y,\, \mathrm{Log}(1+g)>} P(dy) = S_P\varphi(g).$$

另外，當 **X**=**B** 爲布朗運動時，$\mu=0$，$\beta = \mathbf{1}_{[0,\infty]}$ 且μ=Λ。在此情形下，L^2(R^2,λ)=L^2(R,dt)且$\gamma_g \equiv 1$ ($g \in$S)。再由定理二，吾人很容易驗證 S_L 恰爲布朗泛函之 Segal-Bargmann 變換。

令 $L \subset L^2$(S',Λ)爲一足夠平滑的試函數空間[4,5]，且 $L \to L^2$(S',Λ)連續，則吾人稱其對偶 L* 中之元素爲廣義 Lévy 泛函。其 L *- L 序對也以《·,·》表示之。

例四、 定義 Lévy 白噪聲 $\dot{X}\ t$ 爲

$$\left\langle\left\langle \dot{X}(t), \varphi \right\rangle\right\rangle =$$

$$\left(\mu + \int_{-\infty}^{\infty} u d\beta(u)\right) \left\langle\left\langle 1, \varphi \right\rangle\right\rangle + D_{\delta_t} S_L\varphi(0),$$

則 $\dot{X}(t)$ 爲廣義 Lévy 泛函。

例五、 設 $t>0$ 且 $a\in$ R. 定義

$$\delta(X(t)-a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ir(X(t)-a)}dr$$

其泛函表示如下：$\forall\varphi\in L$，

$$\langle\langle\delta(X(t)-a),\varphi\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ira}G_{t,\varphi}(r)dr.$$

上式中

$$G_{t,\varphi}(r)=\frac{E[e^{irX(t)}]}{\sqrt{2\pi}}\times S_L\varphi(\phi_t(r)),$$

其中 ϕ_t : $\mathrm{R}\to\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^2,\lambda)$ 定義如下：當 $u\neq0$ 時 $\phi_t(r)(s,u):=u^{-1}e^{iru1_{[0,t]}(s)}$，否則 $\phi_t(r):=ir1_{[0,t]}(s)$。

吾人稱 $\delta(X(t)-a)$ 作 Lévy 過程之 Donsker-Delta 函數。吾人可證明 $\delta(X(t)-a)$ 爲一廣義 Lévy 泛函。

設 $F\in$ S'，定義 $F(X(t))$如下：

$$\langle\langle F(X(t)),\varphi\rangle\rangle=(F_{[s]},\langle\langle\delta(X(t)-s),\varphi\rangle\rangle),\qquad(11)$$

上式中 $F_{[s]}$表示 F 作用於變數 s 的意思。以上例子皆顯示 Segal-Bargmann 變換的重要性。

最後，我們略述如何導廣義 Lévy-Itô 公式。爲了容易瞭解，吾人只考慮一個特例，即當$(1+u^2)d\beta=\sigma^2d\delta_0+b_1d\delta_1$ $(\sigma^2,b_1>0)$ 之情形。在此情形下 $g\in L^2(\mathrm{R},\beta_0)$ 若且唯若存在 α_0, $\alpha_1\in$ C 使得 $g=\alpha_0 1_{\{0\}}+\alpha_1 1_{\{1\}}$。 對(11)式中之變數 t 微分，吾人即可得 Lévy-Itô 公式：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}F(X(t))=\\&\kappa_1F'(X(t))+\tfrac{1}{2}\sigma^2F(X(t))+\sigma^2\delta^{\dagger}_{(t,0)}F'(X(t))\\&\quad+2b_1((\tau_1F)(X(t))-F(X(t))-F'(X(t)))\\&\quad+2b_1\partial^{\dagger}_{(t,1)}((\tau_1F)(X(t))-F(X(t))),\end{aligned}\qquad(12)$$

上式中$\partial(t,u):L\to L^*$ 爲稍滅算子其定義如下：

$$\partial_{(t,u)}\varphi:=S^{-1}(DS\varphi(\cdot)\partial_{(t,u)}),\ \varphi\in L.$$

而 $\partial^{\dagger}_{(t,u)}$ 則爲其共軛算子。

有關 Lévy 白噪聲更進一步的發展，請讀者參見[4,5]。

參考文獻

[1] Y.-J. Lee, *J. Funct. Anal.*, **82**, 429 (1989).

[2] Y.-J. Lee, *J. Funct. Anal.*, **100**, 359 (1991).

[3] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, *J. Funct. Anal.*, **168**, 46 (1999).

[4] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, *Quantum information* II, 87, World Scientific (2000).

[5] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, Calculus of generalized Lévy Functionals, preprint.