# 隨機遞推結構上的相變與分析

中央研究院統計研究所　黃顯貴

當溫度增加到沸點以上時，水會變成蒸汽。而當溫度下降到冰點以下時，水會結成冰塊。這種冰 ↔ 水 ↔ 蒸汽間形態隨溫度改變的現象，為眾所週知的相變。在數學上，某個函數（或隨機變數）隨著某些變數改變，而有截然不同行為的現象，亦通稱為相變。本文主要目的，在將我們過去數年所研究過的相變現象，作一簡單的回顧與整理。藉由這些問題，說明我們研究相變的動機、目的與方法。並進而闡釋一般相變現象之研究，為具極高興趣的研究方向。

我們所研究過的相變現象，可約略歸成兩大類：

1. 與卜松 (Poisson) 分布相關的相變；
2. 與快速排序法 (Quicksort) 有關的相變。

底下將描述這些相變，其對應的解析問題及使用的分析工具，並嘗試做可能的解釋。最後亦提出出相關的懸題 (open problem)。

## 一、與卜松分布相關的相變

卜松分布 (Siméon Denis Poisson, 1781-1840) 最常以稀有事件定律的形式出現，它幾乎是實用問題裡最容易被聯想，被用來做基本模型的一個離散分布。其定義為：若 $X_\lambda$ 為一卜松($\lambda$)分布

則 $P(X_\lambda = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0,1,2,3\cdots)$，

其中$\lambda > 0$。這個分布被應用的層面極廣。舉例而言，聚會中生日相同的人數、公路上車禍死亡的人數、或單位時間內顧客人數，皆與卜松分布有關 (見[8,9,15])。這個分布有很多漂亮的性質。與本文有關者如下列[10]：

(i) 若 $m \geqq 0$ 滿足 $\lambda - m >> \sqrt{\lambda}$

("當 $\lambda \to \infty$ 時 $\dfrac{\lambda - m}{\sqrt{\lambda}} \to \infty$")，則

$$P(X_\lambda \le m) \sim \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{1}{1 - m/\lambda} (\lambda \to \infty):$$

($a_\lambda \sim b_\lambda$ 表 $\dfrac{a_\lambda}{b_\lambda} \to 1$，當 $\lambda \to \infty$)；

(ii) 若 $m = \left[\lambda + x\sqrt{\lambda}\right]$ ，其中 $x = o(\lambda^{1/6})$ ，

$$P(X_\lambda \le m) \sim \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \ ;$$

(iii) 若 $m - \lambda >> \sqrt{\lambda}$ ，則 $P(X_\lambda \le m) \sim 1$。

這個看似平淡的結果其實很有趣。它反映出卜松分布的漸近走勢。更重要的是這樣的三相行為在很多結構上，以極類似的方式呈現。這便是所謂現象的共通或普遍性 (universality)。換另一個角度來看，這也是為何 “簡單便是美” 的精神之一。再仔細地看看這個結果。當 $m$ 小時（相對於 $\lambda$)，這個結果可以寫成

$$P(X_\lambda \le m) \sim P(X_\lambda = m) \cdot \frac{1}{1 - m/\lambda} 。$$

這意謂著最大項對整個分布貢獻有滿大的比重。而當 $m$ 在平均值附近 (區間大小以標準差 $\sqrt{\lambda}$ 來作衡量單位)，卜松分布趨近一常態分布。當 $m$ 繼續往右增加時，整個分布便收斂到 1。從相變的角度來看，當 $m$ 從 0 開始變大時，卜松分布便從 0 開始增加，最後趨近於 1。而中間的銜接，乃是靠常態分布函數來達成。於是***古典中央極限定理，亦可以視為一相變現象***；其中常態分布被用來作為 0 與 1 溝通的橋樑。它不但比較精確，也引出了更多細化的問題，以釐清更多隱含的現象。

證明中央極限定理需要比 0—1 法則更細的工具。於是這又引出了一個重要的概念：現象的觀察 (或發現) 端視解析工具之犀利程度。這個概念底下會一直重複出現。它與觀察星象時，望遠鏡倍數大小之影響有著異曲同工之妙。

### 1.1 高維單位方塊 $[0,1]^d$ 中極大點個數：卜松 → 常數

多維資料點沒有絕對的大小關係。任兩點要作比較，必須先將所謂的“偏序”(partial order)定義出來，才有大小的概念。在多維資料上一個常用、且最自然的偏序，便是底下所謂的輸贏 (dominance) 偏序：給定兩點 A$=(a_1,\ldots,a_d)$，B$=(b_1,\ldots,b_d)$。如果對所有的 $i=1,\ldots,d$, $a_i>b_i$，則我們說 A 贏過 B。一個樣本集中，所謂的極大點，便是沒被其他點贏過的那些點。這種偏序在很多領域上，如工程、經濟、作業研究、社會學、計算幾何等極爲有用。舉例而言，甲學生若每科成績皆優於乙學生，則甲生的學業成績自然比乙生的成績好。這個解釋似乎多此一舉，但較有用的是如果某生數學 100 分，其它學科皆掛零。則此生不應該算“劣等生”(從輸贏偏序來看，此生屬於極大點)。這種看法對於此類學生，有較具輔助性的正面教育參考意義。

現在假設我們自 $[0,1]^d$ 中隨機挑出 $n$ 個點（獨立、均勻、同分布），再去計算這 $n$ 個點中極大點的個數。令此變數的平均值爲 $M_{nd}$，則

$$M_{nd} = \sum_{1\le k\le n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} k^{-d+1} \quad 。 \qquad (1)$$

**問題：若 $d$ 隨 $n$ 變動時，$n\to\infty$，$M_{nd}$ 的漸近行為如何變化？**

首先，爲何研究此問題？此乃實用上 $n$ 與 $d$ 皆爲有界。所以當 $n=10^4$ 且 $d=10$ 時，我們不知道 $d$ 是 $O(n^{1/4})$或 $O(\log n)^2$ 或是 $O(1)$。於是我們必須較精確地去描述當 $n\to\infty$，且 $d$ 隨著 $n$ 的不同等級增加時，$M_{nd}$ 的漸近變化行爲。這是一般所謂“均勻漸近分析”，其研究動機主要來自實用上的刺激。

其次，若我們細看 (1) 式，可以發現$-1$ 在整個作和中，扮演了極大的抵銷角色。例如 $d=2$ 時，我們可以證明

$$M_{n2} = \sum_{1\le j\le n} \frac{1}{j} \sim \log n \text{ 。}$$

所以，雖然單一項可以很大 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ (指數階)，但由於$-1$ 在整個和中作怪，於是整體剩餘量僅有對數階。這意味著，雖然這個和是確切的表達式，實用上當 $n$ 很大時，其用途卻極有限 (極大的抵銷會產生不可避免的數值誤差)。於是我們需要較簡單、且有效的漸近式。

可以證明 $M_{nd}$ 有如下的複積分表達式。

$$M_{nd} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r<1} z^{-d} \prod_{1\le j\le n} \frac{1}{1-z/j}\, dz \text{ 。}$$

接著，利用一些複變漸近分析手法，我們可以導出，對於所有的 $d$

$$\frac{M_{nd}}{n} \sim (2-\rho)P(X_n<d) \quad (\mathrm{n}\to\infty), \quad (2)$$

其中 $\rho=\min\{1,\frac{d-1}{\log n}\}$，是伽瑪函數，$X_n$ 是一卜松$(\log n)$分布。於是，利用卜松分布的漸近逼近式，我們得到

$$\frac{M_{nd}}{n} \sim \begin{cases} \dfrac{(\log n)^{d-1}}{n(d-1)!}\Gamma(1-\dfrac{d}{\log n}), & \text{當 } \log n - d >> \sqrt{\log n}; \\ \Phi(x), & \text{當 } d = \lfloor \log n + x\sqrt{\log n}; \rfloor \\ 1, & \text{當 } d - \log n >> \sqrt{\log n} \text{ 。} \end{cases}$$

這個結果直觀上也合理：當 $d$ 很大時，極大點的個數接近 $n$ (考試科目非常多時，要每科都贏過某人的機率也較低)。只是“相變發生在 $d\sim\log n$ 附近”這個性質直觀上並不易猜測。同時我們也自然要問，爲何 $M_{nd}/n$ 與卜松分布如此接近呢？有沒有更直觀的解釋？另外對於(2)式有沒有較機率 (而不是用複變分析) 的證明呢？這些都是很有趣的研究方向；相關研究結果請參閱[1,2]。

值得一提的是，我們由此結果可看出用離散分布來逼近離散問題，可得到頗爲均勻的結果。這個現象也有其一般性。

### 1.2 有限體上隨機多項式的質因式個數：卜松 → 負二項分布

給定一個有限體 $F_q$，其中 $q$ 是一個質數的冪次方。考慮其上領導係數爲 1 的多項式。設若所有 $q^n$ 個這種多項式都等機率給出，則隨機抽取出的多項式，作質因式分解後，質因數個數 $Y_n$ 分布爲何呢？

我們有如下的關係式

$$\sum_{n\geq o} q^n P(Y_n = m) y^m z^n = \prod_{j\geq 1} \left(\frac{1}{1\text{-}yz^j}\right)^{I_j} ,$$

其中 $\sum_{n\geq 1} I_n z^n = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \frac{1}{1-qz^k}$ ，

$\mu(k)$ 是所謂的莫比斯 (Möbius) 函數：$\mu(n)=0$，若 $n$ 有重覆的質因數；否則$\mu(p_1 p_2 \ldots p_k)=(-1)^k$。由這個二元生成函數出發，再透過一些複變分析的手法，我們可以證明，當 $m$ 小時 ($q\log n - m >> \sqrt{\log n}$)，$P(Y_n = m)$ 走勢大約像卜松($\log n$)分布；當 $m$ 很大時 ($m - q\log n >> \sqrt{\log n}$)，$P(Y_n = m)$ 約略像一負二項分布 (參數爲 $q$ 和 $1/q$)；這兩個範圍的連接，靠的是所謂拋物柱狀函數 (parabolic cylinder function)

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{q-1} \exp(-xt - \frac{t^2}{2})\, dt \text{ 。}$$

由於結果稍嫌複雜，在此不將算式列出[11]。此文亦導出一卜松與一負二項分布的對合律，這個對合律使得我們可以給出一個對 $P(Y_n = m)$ 更均勻的逼近式。同時，從分析角度上看，我們所碰到的積分類型，是所謂移動的鞍點加上 $q$ 次的奇異點 (pole)；而麻煩的是，這兩個點當 $m$ 移動時，會互相重疊在一起。於是，我們需要較細膩的分析與較有效的工具來處理。這個例子說明，在一般的問題上，相變的精確描述，需要較複雜的函數與較深入的解析技巧。類似 (而較簡單) 的現象，也出現在隨機整數的質因數個數分布[12]，與其它隨機組合結構上[13]。

### 1.3 獨立同分布隨機變數上的連續空前大個數：卜松 → 非卜松

一個數列的空前大 (或破紀錄) 指的是那些數值大於所有位於其前者。而連續 $r$—空前大指的是在此序列中，$r$ 個相連數皆爲空前大。

**問題：給定一獨立同分布的連續隨機變數序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，固定 $r \geq 1$。令 $Y_{nr}$ 表此序列中連續 $r$-空前大的個數 (重疊者重覆計算)，則 $Y_{nr}$ 的漸近分布為何？**

這個問題在 $r=1$ 時爲一機率上的老問題，結果也是已知。首先其機率生成函數爲

$$E(y^{Y_{n1}}) = \prod_{1\leq j\leq n} (1 + \frac{y-1}{j}) \text{ 。}$$

從而我們可證明[14]：$Y_{n1} \sim \text{Poisson}(\log n) \sim N(\log n, \log n)$，其中 $N(a, b)$ 表平均值爲 $a$，變異數爲 $b$ 的常態隨機變數。

當 $r \geq 2$ 時，令 $F_{n,r}(y) = E(y^{Y_{nr}})$。則 $F_{n,r}(y)$ 滿足如下的遞推式：若 $n < r$ 時，

$F_{n,r}(y) = 1$；當 $n \geq r$ 時，

$$F_{n,r}(y) = \frac{n+y-1}{n} F_{n-1,r}(y) + (1-y) \sum_{2\leq j\leq r} \frac{(n-j) F_{n-j,r}(y)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)} .$$

從這個遞推式，我們可以得出以下的微分方程：

$$(1-z) f^{(r)} = (r - (1-y)(1-z)) f^{(r-1)} + (1-y) \sum_{1\leq j<r} (z+j) f^{(j)} ,$$

其中 $f(z) = \sum_{n\geq 0} E(y^{Y_{n,r}}) z^n$ 。

藉由對這個方程的分析，我可以得出 $F_{n,r}(y)$ 的漸近行爲 (當 $n \to \infty$，y 有界)。然後導出 $Y_{n2} \sim \text{Poisson}(1)$，以及當 $r \geq 3$ 時，$Y_{nr} \sim Y_r$，其中 $Y_r$ 不是 Poisson。

那麼 $Y_r$ 到底是什麼呢？目前僅證明 $E(y^{Y_r})$ 爲一全解析函數 (entire function)。且在 $r$=3 時，可以藉由所謂的匯合超幾何函數 (confluent hypergeometric function) 來完全表示。理論上在 $r \geq 4$ 時，我們也有複積分來表示 $E(y^{Y_r})$，但這種表達式很難令人滿意，是以如何進一步刻畫 $Y_r$ ($r \geq 4$) 爲一懸題。

當然值得一提的是，不管如何刻畫，$Y_r$ 在 0 取值的機率，以很快的速度趨近 1 (這意味著當 $r$ 增加時，要找到連續 $r$ 空前大的機率趨近 0)。例如 $P(Y_{10} = 0) = 0.9999997213\ldots$。以一般相變的角度而言，這個例子雖然稍嫌牽強，但其所自然引出的現象、問題與挑戰均極具代表性。

## 二、與快速排序法相關的相變

先介紹快速排序法。這是個將數列從小排到大 (或從大排到小) 的算法。它最早由 Hoare

在 1962 年提出，至今約略 40 年，且一直是計算機上使用的最廣泛、研究的最深入的排序法。它的重要性可由其名列 20 世紀十大最具科技發展影響力算法中[7]可見一般。這個算法具備了簡單與效率兩大本錢,使得相關研究 (理論與與實務) 歷久不竭。

這個算法最簡單的版本約略如下：要將 $n$ 個數排序，先任取一數作爲比較的標竿，再將所有數與此標竿比較，比較小的放一堆，比較大的放另一堆；於是，作完此一步驟後，該標竿放定位，再用同樣的方法，遞迴地排序較小與較大那兩堆，直到每堆僅剩一數爲止。

想要瞭解這個算法的效率，最簡單的便是假定我們所要排序的數列，來自一獨立之同分佈隨機序列 (有一共同的隨機連續分佈)，然後去計算快速排列法的工作量 (比較次數、交換次數等)。

**讀者不免要問：獨立同分佈的假定是否太過“烏托邦”而不切實際？**

這是一個相當一般的問題，我們可以從幾個角度來看。首先，獨立同分佈雖然是一極度理想化的模型，它所提供的較原型的結果，除了作爲實用上快速參考外，經常在更廣的模型上也成立。當然，數學上能否處理更一般的模型，則是另一個層面的問題。

理論模型的另一個好處是它與不同的機器、不同的程式碼、不同的操作者等無關。實用上的序列可以千奇百怪，理論模型則有點“以不變應萬變”之勢，來預測實用上可能產生的行爲與變異。

假定我們接受上述的模型論點，則快速排序法的工作量 $Y_n$ (假設序列隨機性不因拆解問題而被破壞)滿足 $Y_0=0$，以及，當 $n \geq 1$ 時 $Y_n = Y_{I_n} + Y^*_{n-1-I_n} + T_n$，其中 $Y_n = Y^*_n$。

這個式子說 $Y_n$ 的分佈與右邊三量和的分佈相同，其中 $T_n$ 爲拆解問題所耗之工作量，$I_n$ 在最簡單的情況下是一 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 上的均勻分佈。$Y_n$ 的隨機漸近分析，在文獻上有廣泛的研究，這裏介紹兩種類型的相變：

1. 第一型相變：當我們固定 $T_n$（比如說 $T_n \equiv 1$），讓 $I_n$ 改變時，得出極限分佈由常態變成不存在。
2. 第二型相變：當我們固定 $I_n$（比如說 $I_n \sim$ Uniform [0,n-1]），讓 $T_n$ 變動，則極限分佈由常態變成非常態。

這兩型相變有點類似統計物理上的相變分類，其中第一型是離散型，第二型是連續型。

### 2.1 第一型相變：常態 → 無極限分布

先來看我們的第一型相變，一個簡單、變動 $I_n$ 的實例是所謂的“奇樣本中值法”來選取標竿。這個方法主要在改善快速排序法中標竿的選取品質：與其隨便取，不如稍花些功夫，挑出一個奇數樣本（大小爲 $2t+1$，$t \geq 1$），再以此小樣本中的中值（median-of-$(2t+1)$）來作標竿，將原序列如快速排序法般分成兩堆，再以同樣方法遞推排序之。

如果我們想了解“奇樣本中值法”這個步驟總共用了多次，則這個量滿足 $Y_n=0$ ( $n \leq 2t$ ) 及 $Y_n \overset{d}{=} Y_{I_n} + Y_{n-1-I_n} + 1$ ( $n \geq 2t+1$ )；$P(I_n = k) = \binom{k}{t}\binom{n-1-k}{t}/\binom{n}{2t+1}$。

有趣的結果是 (參閱[3] )：*當 $1 \leq t \leq 58$ 時* $\dfrac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} \to N(0,1)$ *；當 $t > 58$ 時* $\dfrac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}$ *的極限分布不存在。*

看到這個結果，大多數人的第一個問題是爲什麼會這樣？爲什麼是 58？解析上來看，這個現象與所謂指標多項式 (indicial polynomial) $(z+t)\cdots(z+2t) - (2t+2)!/(t+1)!$ 的第二大根 (以實部來排大小) 位置有關 (或是某個對應矩陣的第二大特徵根位置)。這個根記作 $\alpha$；若 $\alpha$ 小於 1.5 (當 $1 \leq t \leq 58$)，則 $Y_n$ 的期望值滿足 $EY_n = \mu n + O(n^{1/2-\varepsilon})$，而變異數滿足 $VarY_n \sim \sigma^2 n$。於是，$Y_n$ 漸近上趨近一常態分佈。當 $\alpha > 1.5$ 時 ($t > 58$)，

$$\begin{cases} EY_n \sim \mu n + P_1(\log n)\, n^{\alpha-1}, \\ VarY_n \sim P_2(\log n)\, n^{2\alpha-2}, \end{cases}$$

其中 $P_1(u)$ 與 $P_2(u)$ 爲有界的週期函數。特別注意：當 $\alpha > 1.5$ 時，$2\alpha - 2 > 1$。所以變異數比平均值來得大；再加上週期函數的循環作用，於是 $\dfrac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}$ 的極限分布不存在。實際上

我們證明 $E\left(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}\right)^k \sim P_k(\log n)\ \ k \geq 2$ ，其中 $P_k$ 是非常複雜的週期函數。這些 $P_k$ 間由於不滿足簡單的形式，所以極限分布不存在。

以上是較解析的解釋，有沒有較直觀的說法呢？當然要以直觀的方式來說明 $t=58$ 前後有明顯相變，並不太可能，因爲對這個問題而言，58 是精確分析下的產物。不過，底下的說法大概可以給出一粗淺的描繪。

如果我們仔細看 $Y_n$ 的定義，要計算 $Y_n$ 的分布，必先算其前的分布，如此遞推下去，所有的計算基本上都回到 $Y_n$ ( $0 \leq n \leq 2t$ ) 上，而這些 $Y_n$ 是退化的隨機變數，它們只取 0 這個常數。當 $n$ 變大時，$Y_n$ 可看成是許多退化隨機變數與 1 的線性組合。於是當 $t$ 增大時，相變自然產生。

這個說法可以再描述得更清楚些。根據定義，當 $0 \leq n \leq 2t$，$Y_n=0$；當 $2t+1 \leq n \leq 3t+1$ 時，$Y_n=1$；當 $3t+2 \leq n \leq 4t+2$ 時，$Y_n$ 取 1 或 2；當 $4t+3 \leq n \leq 5t+3$ 時，$Y_n$ 取 2 或 3；依此類推，我們可以發現 $Y_n$ 的計算，每次都是以一個長度爲 $t+1$ 的區塊來向上延伸。這個區塊式的遞迴性質，基本上是所有動差 (moment) 漸近展式中，週期函數的產生根源，而這些週期函數則是相變發生的活水源頭。我們可以證明：若可以有效的消除平均值展式第二項的週期函數，則極限分布存在 (但不是常態)。

這個相變只是冰山一角，理論上，我們可以有系統地製造出在任何數字上的類似相變現象；[3,5]。一個有趣、值得一提的例子是如下的隨機變數：假定 $m \geq 3$，定義 $Y_0=0$；$Y_1=1$，$1 \leq n \leq m-1$，當 $n \geq m$ 時，

$$Y_n \overset{d}{=} Y^{[1]}_{J^{[1]}_n} + \cdots + Y^{[m]}_{J^{[m]}_n} + 1,$$

其中 $Y^{[1]}_n \overset{d}{=} \cdots \overset{d}{=} Y^{[m]}_n$

$$P(J^{[1]}_n = j_1, \cdots, J^{[m]}_n = j_m) = 1/\binom{n}{m-1},$$

$Y_n$ 所代表的是隨機多分支樹 (分支度是 m) 所須儲存空間。這個隨機變數在 $3 \leq m \leq 26$ 時，極限分布爲常態；當 m ＞ 26 時，極限分布不存在。

這些相變的刻劃須要對遞推方程的特性有清楚掌握、再配合精確的漸近分析，以及所謂的動差法。動差法之所以在這類問題上特別有用，原因在於所有的動差 (不管是否標準化) 都滿足同一類型的遞推式，這些遞推式在漸近分析上，較原來機率生成函數的遞推式容易處理，於是，我們只須集中精力處理遞推式在所有可能的情形下，漸近行爲如何隨著不同的 non-homogeneous 項，所有動差的漸近行爲，便可在同一架構下整合處理。

動差法雖然在很多問題上，皆是不得已的辦法。但在遞? 隨機變數上? 有許多好處，除了上述特性外，另一個特點是在某些情況下，我們可以細化此法，得到分布函數的收斂速度及局部極限定理 (local limit theorem)。

而這些更深層結果又再反映出另一層的相變；例如，在“奇樣本中值法”問題中我們可以證明若 $1 \leq t \leq 43$ 則 (見[16] )

$$\sup_x |\, P(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} < x) - \Phi(x) | = O(n^{-1/2})\ ;$$

若 $44 \leq t \leq 58$ 則

$$\sup_x |\, P(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} < x) - \Phi(x) | = O(n^{-3(\alpha - 3/2)})\ ;$$

其中 $\alpha$ (如前述) 爲 $(z+t)\cdots(z+2t) - (2t+2)!/(t+1)!$ 的第二大根。表 1 列出當 $t$ 由 44 變到 58 時，$3(\alpha - 3/2)$ 的變化。這個結果再度反映出“工具的犀利程度與能觀察的現象成正比”。

**表 1**

| t | α | 3( 3/2-α ) | t | α | 3( 3/2-α ) |
|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 1.33764 | 0.48705 | 52 | 1.43798 | 0.18603 |
| 45 | 1.35210 | 0.44368 | 53 | 1.44843 | 0.15469 |
| 46 | 1.36594 | 0.40217 | 54 | 1.45850 | 0.12449 |
| 47 | 1.37920 | 0.36238 | 55 | 1.46820 | 0.09537 |
| 48 | 1.39192 | 0.32422 | 56 | 1.47757 | 0.06728 |
| 49 | 1.40413 | 0.28760 | 57 | 1.48661 | 0.04015 |
| 50 | 1.41586 | 0.25241 | 58 | 1.49534 | 0.01395 |
| 51 | 1.42713 | 0.21858 | 59 | 1.50378 | ＜0 |

### 2.2 第二型相變：常態 → 非常態

考慮 $Y_n \overset{d}{=} Y_{I_n} + Y^*_{n-1-I_n} + T_n$，

其中 $I_n = Uniform\ [0, n-1]$，$Y_n \overset{d}{=} Y^*_n$。

**問題：當 $T_n$ 變動時，$Y_n$ 的漸近分布如何隨之變化呢？**

直觀上來看，如果 $T_n$ 的平均取值不大，則 $Y_n$ 約略可視為很多小變數的和，根據中央極限定理的精神，我們預期 $Y_n$ 應是漸近常態。反之，若 $T_n$ 的平均取值較大，則單一 $T_n$ 項對總 $Y_n$ 的貢獻可能占一固定比例，於是 $Y_n$ 的極限分布若存在，應該不是常態。這個直觀描述的方式可以用更一般的字眼來類比：當 $T_n$ 不大時，我們大約處在一民主社會，其中每張選票 (或每個選民) 對大的系統或政體，或多或少有著相同的貢獻。整體而言，系統是可以較“常態”的方式來發展；反之，若少數人對整個系統有過多的介入或影響 (像獨裁或其它專制政體)，則系統可能有較大的變異性 (特別是當政權轉移時)。

上述的直觀，回到比較數學的語言時，可以約略描述如下：當 $ET_n = O(\sqrt{n}\ L(n))$ 其中 $L(n)$ 是一平緩函數 (slowly varying function) 如 $(\log n)^k$ 或 $\exp(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ 時，再加上些許條件，$Y_n$ 的分布是漸近常態(參閱[17])。另一方面，當 $ET_n >> \sqrt{n}$ 時，在適當條件下，$Y_n$ 的極限分布存在但不再是常態。我們可以看出，$\sqrt{n}$ 大約是一分水嶺，它區分了常態與非常態。當然，這個結果可以再細化，如果我們進一步用更細的“顯微鏡”去“照射”，可以得到 $n^{1/3}$ 是好的收斂速度與差的收斂速度的分水嶺 [16]。

## 三、結論

相變現象幾乎無所不在，小到物種的突變，大到改朝換代，或滄海桑田；從文章的啓承轉合到所謂的合久必分、分久必合。它真正的意涵與描述完全因觀察者 (或研究者) 對尺度大小的掌控。在數學上，分析工具的犀利與適用程度，決定了相變是否能被觀察 (這與顯微鏡倍數大小可決定粒子是否可見，有異曲同工之處)。觀察到相變後，接踵而來的問題是如何描述？為何有相變？以及此種相變有否一般性？有沒有更進一層的相變 (更大倍數的顯微鏡能看到更細的生物)？直觀上如何解釋？這些問題所牽連的經常是不同層次的問題，有的容易，有的難，研究者必須嘗試站在不同的高度、角度去看問題，去思考更深層的意涵，去連接不同問題的共通性 (除開某些異質性)，相變研究之所以有趣、迷人，除了其多樣性外，上述問題扮演了重要的誘因與挑戰。

## 參考文獻


1. Z.-D. Bai, C.-C. Chao, H.-K. Hwang, W.-Q. Liang, *Annals of Applied Probability*, **8**, 886 (1998).
2. Z.-D. Bai, H.-K. Hwang, W.-Q. Liang, T.-H. Tsai, *Electronic Journal of Probability*, **6**, 1 (2001).
3. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, *Random Structures and Algorithms*, **19**, 316 (2001)。
4. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, *Algorithmica*, **29**, 44 (2001).
5. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, T.-H. Tsai, *Journal of Algorithms*, to appear (2002).
6. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, Y.-N. Yeh, *Random Structures and Algorithms,* **17,** 169 (2000).
7. J. Dongarra, S. Sullivan, *Computing in Science & Engineering*, January / February, 22 (2000).
8. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, v. 1, Wiley (1968).
9. F. A. Haight, Handbook of the Poisson Distribution, John Wiley (1967).
10. H.-K. Hwang, *Studies in Applied Mathematics*, **99**, 393 (1997).
11. H.-K. Hwang, *Random Structures and Algorithms*, **13**, 17 (1998).
12. H.-K. Hwang, *Journal of Number Theory*, **69**, 135 (1998).
13. H.-K. Hwang, , *Probability and* Computing, **7**, 89 (1998).

14. H.-K. Hwang, *Advances in Applied Probability*, **31**, 448 (1999).
15. 黃顯貴，卜松估計的漸近分析，自然科學簡訊，第十二卷第三期，94 (2000)。
16. H.-K. Hwang, *Annals of Probability*, accepted for publication (2002).
17. H.-K. Hwang, and R. Neininger, *SIAM Journal on Computing*, accepted for publication (2002).