[研究新領域報導]

頻道分配及相關問題

台灣大學數學系　張鎮華

一、緣起

圖型的 T-著色緣自於通訊中的頻道分配問題，在這個問題中，我們考慮某一區域中的一些發射站，我們需要分配給每一發射站一個頻道，爲方便討論起見，我們不妨假設每一頻道爲一非負整數。發射站之間可能會產生干擾，我們可以定義這個系統的干擾圖 $G=(V,E)$ 如下：頂點集 V 表示所有的發射站，兩發射站若互相干擾，則在他們之間連一條邊。另外，還有一含 0 的非負整數集 T，包含那些頻道之間不可能的間隔。所以，正式來說，給定 T 之後，一圖 $G=(V,E)$ 的 T-著色是要找一函數

$$f: V \to \{0, 1, 2, ..., k\}$$

使得 $xy \in E$ 時恆有 $|f(x)-f(y)| \notin T$。在所有可能的分配函數中，我們要找一分配方法，使其全寬 (span) k 達到最小，這個值稱爲 G 的 T-全寬，用 $\mathrm{sp}_T(G)$ 表示。

頻道分配問題始於 Hale [1] 的引進。在實際應用上，UHF 電視的頻道分配是 $T=\{0, 7, 14, 15\}$ 及 $T=\{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 14, 15\}$的情況；而在 $T=\{0\}$ 時，這個問題相當於圖形的點著色，也是被廣泛研究的課題。

T-著色問題經過這二十年的討論，已經有各式各樣的結果，我們將從定性及算法的角度，談談這些結果，及其發展性。

另一個相關的問題，也算是變型的問題，則是由 Roberts [2] 和 Griggs 及 Yeh [2] 提出來的 $L(2,1)$-標題號問題。在這個變型中，頻道的干擾可分二個層次：干擾及很靠近的干擾，干擾圖所代表的意義是，距離爲 2 的兩點會干擾，距離爲 1 的兩點則產生很靠近的干擾。而頻道分配的條件則是：

當 $d(x,y)=1$ 時 $|f(x)-f(y)| \geq 2$；

當 $d(x,y)=2$ 時 $|f(x)-f(y)| \geq 1$。

在這問題中，$L(2,1)$-標號 f 的全寬的最小値稱爲 G 的 $L(2,1)$-標號數 $\lambda(G)$。

以下我們亦將針對這十年來的發展，談一談 $L(2,1)$-標號相關的結果。

二、T-著色問題

和圖論大多數的參數一樣，我們最希望的是，給定圖 G 和含 0 的非負整數集 T 之後，就能決定其全寬 $\mathrm{sp}_T(G)$。但是，這個問題是困難的，所以一般來說，常見的結果是全寬的上下界，差別只是其好壞而已，至於要求到全寬的正確值，僅能在特殊的 T 或特殊的圖形才有可能，有時甚至要涉及演算法的設計。重要的變化題目涉及邊全寬、連續 T-著色等。

有關求得 $\mathrm{sp}_T(G)$ 正確值的結果，在最早期的研究中，Cozzens 和 Roberts [3] 決定了當 $T=\{0,1,...,r\}\cup S$ 時，其中 S 的元素都不是 $r+1$ 的倍數，任一圖的全寬和其著色數有一定關係：$sp_T(G)=(r+1)(\chi(G)-1)$。甚至當 $T=\{0,s,2s,...,ks\}\cup S$，其中 S 是 $\{s+1, s+2, ..., ks+1\}$的部份集合，G 的全寬亦可完全決定。更一般的結果，之後亦陸續被提出來，但大部份是以變化 T 這個集合來處理。

有關全寬的一個變型是邊全寬。一個 T 著色的邊全寬和全寬的定義類似，只是此時要求的是 $\max\{|f(x)-f(y)| : xy \in E\}$ 的最小可能值。這一方面的研究首先是由 Liu 在 $T=\{0, 1, ..., r\}$ 及 $G=C_n$時的結果，我們[4]於 1999 年獲得更一般 C_n 的 d 次方圖的結果。一般來說，邊全寬較全寬來得難求一些。

T-著色和其他問題也有極密切的關聯。例如 T-數列的密度問題，和 K_n 的 T 全寬是一致的，參見 Griggs 和 Liu [5] 的結果。給定集合 T，數論上有一問題是求非負整數集合 S，使得 S 中任兩數的差不落在 T 中，目標是要求這樣的 S 使其密度越大越好，這問題 Motzkin, Cantor, Gordon 等人均有研究；在 T-著色的說法裏，

他恰好是 K_n 的 T-全寬。和這相關的另一種說法，則是將上述問題與距離圖的分數著色拉上關係，使得這問題和距離圖上的著色，有了更密不可分的關聯，參見 Chang, Liu, Zhu [6] 的結果。

此外，連續 T-著色亦是廣為研究的題材，這時候的要求是，所用的頻道要是連續的一些數。有關這方面的研究，大都集中在 $T = \{0, 1, 2, ..., r\}$ 的情況；首先是 Sakai 和 Wang 將之與漢米爾頓 r-路徑結合，接下來是 Roberts 在二部圖且 r 為 1 時的結果，有關二部圖更一般 r 的結果，參見 Chang, Juan, Liu [7] 的定理。除此之外，Troxell, Guichard 等人在連續 k-序對 $(r+1)$-距離著色，Tesman 在列 T-著色…等等的研究亦十分活躍。

三、$L(2,1)$-標號問題

$L(2,1)$-標號的概念是 Roberts [2] 首先建議，Griggs 和 Yeh [2] 寫出第一篇文章，這篇文章已經約略勾劃出研究的大走向。

首先，他們求出路徑圖和圈圖的 λ 數，接著給出了超立方體和樹圖 λ 數的上下界；其中，樹圖的值只可能是圖的最大度加 1 或加 2，但是，倒底是那一個？有沒有辦法很容易決定？他們認為這是 NP 困難的問題。

對於一般的圖 G，如果其最大度是 Δ，他們證明了 $\lambda(G) \le \Delta^2 + 2\Delta$，並且試著去看各種條件如何降低這個上界；比方說，圖是 3 連通時，上界可以降為 $\Delta^2+2\Delta-3$，又如，圖的直徑為 2 時，上界可以下降到 Δ^2；他們並且舉了一些例子，λ 數真的達到 $\Delta^2-\Delta$ 這麼大。所以最後他們大膽的猜測，一般而言均有 $\lambda(G) \le \Delta^2$。

此外，他們也從演算法的角度去證明這問題是 NP 困難。

最後他們提出一個更一般的問題，給定 n 個正整數 $m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_n$，要求標號的結果滿足：當 $d(x,y)=i$ 時恒有 $|f(x)-f(y)| \ge m_i$（其中 $1 \le i \le n$）。在後來的研究中，大部份著重在 $n=2$ 的情況，一般用 $L(p,q)$-或 $L(j,k)$-標號為題。

首先，就能求得正確值的圖類來說，除了上述的圈圖和路徑圖以外，Jha, Kuo 和 Yan 在路徑圖及圈圖之乘積上亦有收獲；最近 Georges, Mauro, Stein [8] 完全圖的乘積上亦有很好的結果，其運用的手段是群論上的方法，所以引起 S. Zhou 的興趣，更以代數的手法，研究起 Caley 圖的結果，Zhou 於六月來台訪問三週，我們在這方面有許多討論。

關於上下界的討論，結果比較豐富。首先，Whittlesey, Georges, Mauro [9] 用 Coding 的方法給出了超立方體上更好的結果；Sakai [10] 給出弦圖的上界，只是一般圖的 ¼；最近看到 Bodlaender 等人的一篇尚未出刊的論文，有更多關於排列圖、分裂圖、外平面圖等等的上界，均很有興趣。至於最一般的圖，Chang 和 Kuo [11] 將原來 $\Delta^2+2\Delta$ 的上界改進到 $\Delta^2+\Delta$，但離猜測的 Δ^2 仍有一些差距。

在演算法方面，Chang 和 Kuo [11] 利用二部圖的匹配，給出一有效算法，用來決定一樹圖的 λ 數到底是 $\Delta+1$ 或 $\Delta+2$，從而解答了 Griggs 和 Yeh [2] 原來猜測是 NP 難的問題。另外，同一篇文章也給出 cographs 上的演算法，這方法也將此問題和路徑分割拉上聯繫。

此外，將 $L(2,1)$ 推廣到 $L(p,q)$-標號，將無向圖推廣到有向圖，仍至於類似於邊全寬的做法，或者連續標號的問題等等，亦都有很多後續的研究。

參考文獻

[1] W. K. Hale, Proc. IEEE, **68**, 1497 (1980).
[2] J. R. Griggs and R. K. Yeh, *SIAM J. Discrete Math*, **5**, 586 . (1992).
[3] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, *Congr*, **15**, 191. (1982).
[4] S.-J. Hu, S.-T. Juan and G. J. Chang, *Graphs and Combin*. **15**, 295 (1999).
[5] J. R. Griggs and D. D.-F Liu, *JCT A*, **68** 169 (1994),.
[6] G. J. Chang, D. D.-F Liu and X. Zhu, JCT, B, **75**, 259 (1999).
[7] G. J. Chang, S. T. Juan and D. D.-L. Liu, *SIAM J. Discrete Math*., **14**, 370 (2001).
[8] J. P. Georges, D. W. Mauro and M. I. *Stein, SIAM J. Discrete Math*., **14**, 28 (2001).
[9] M. Whittlesey, J. P. Geroges and D. W. Mauro, *SIAM J. Discrete Math*., **8** 499 (1995).
[10] D. Sakai, *SIAM J. Discrete Math*., **7**, 133 (1994).
[11] G. J. Chang and D. Kuo, *SIAM J. Discrete Math*., **9**, 309 (1996).