[研究成果報導]

隱馬可夫模型及其極限理論

中央研究院統計科學研究所　傅承德

一、隱馬可夫模型

隱馬可夫模型(hidden Markov model)為一個在馬可夫隨機環境中的參數馬可夫鏈(Markov chain)，參見 Fuh [1]，且此馬可夫鏈的標的狀態被視為遺失資料。特別地，令 $\mathrm{X}=\{X_n, n\ge 0\}$為一個在一般狀態空間$\chi$上的馬可夫鏈，其轉移機率核(transition probability kernel)為$P_\theta(x,\cdot)= P_\theta(X_1\in\cdot|X_0=x)$，其平穩機率 (stationary probability) 為 $\pi_\theta(\cdot)$ ，其中 $\theta\in\Theta\subseteq R^d$ 表示未知參數。假設一取值在 R^d 上的隨機序列$\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$，使得$\{(X_n,\xi_n), n\ge 0\}$為一在$\chi\times R^d$ 上的馬可夫鏈，且在給定 X 序列的條件下，ξ_n 是一個馬可夫鏈，其機率為

$$P_\theta(\xi_{n+1}\in B|X_0,X_1,\cdots;\xi_1,\cdots\xi_n)= P_\theta(X_{n+1}:\xi_n,B)\ a.s. \tag{1.1}$$

對於每個n與$B\in B(R^d)$，其中$B(R^d)$為在R^d上的 Borel σ-域(σ-algebra)。

再者，我們假設對於這個馬可夫鏈$\{X_n,n\ge 0\}$，存在一個相對於χ上的σ-有限測度的轉移機率密度 (transition probability density) $p_\theta(x,y)$ ，以使得

$$P_\theta(X_1\in A,\xi_1\in B|X_0=x,\xi_0=s_0)= \int_{y\in A}\int_{s\in B} p_\theta(x,y)f(s;\varphi_y(\theta)|s_0)Q(ds)m(dy) \tag{1.2}$$

其中 $f(\xi_k;\varphi_{X_k}(\theta)|\xi_{k-1})$ 是給定ξ_{k-1}下，ξ_k 的條件機率密度函數。而X_k為在R^d 上的σ-有限測度Q，其中$\varphi_y(\theta), y\in\chi$是定義在參數空間$\Theta$上的函數。我們亦假設這個馬可夫鏈$\{(X_n,\xi_n), n\ge 0\}$有一個平穩機率，$m\times Q$上，其機率密度函數為$\pi(x)f(\cdot;\varphi_x(\theta))$。為了簡化符號，在本文中，我們將分別令$\pi(x)$代表$\pi_\theta(x)$，及 $p(x,y)$代表 $p_\theta(x,y)$。

定義 1　若存在任何一馬可夫鏈$\{X_n,n\ge 0\}$，使得這個過程 $\{(X_n,\xi_n), n\ge 0\}$ 符合 (1.1) ，則$\{\xi_n,n\ge 0\}$被稱為一個隱馬可夫模型。

值得注意的是，當給定 X ，ξ_n 是條件獨立時，$\{(X_n,S_n),n\ge 0\}$被稱為馬可夫隨機漫步(Markov random walks)，其中$S_n=\sum_{t=1}^n\xi_n$ 。

在本文中的第二節，我們討論在參數化隱馬可夫模型上，改變點偵測的結果。在第三節我們考慮馬可夫隨機漫步上相關的機率議題，特別是 Wald 方程與馬可夫更新理論(Markov renewal theory)。

二、隱馬可夫模型上的改變點偵測

給定從一隱馬可夫鏈$\{\xi_n,n\ge 0\}$的觀察值$\xi_0,\xi_1,\cdots\xi_n$ ，其概似函數(likelihood function)為

$$p_n(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n;\theta)= \int_{x_0\in\chi}\cdots\int_{x_1\in\chi}\pi_\theta(x_0)f(\xi_0;\varphi_{x_0}(\theta)) \cdot\prod_{j=1}^n p_\theta(x_{j-1},x_j)f(\xi_j;\varphi_{x_j}(\theta)|\xi_{j-1})m(dx_n)\cdots m(dx_0) \tag{2.1}$$

令

$$M=\{h|h:\chi\to R^+\ m-\text{可測的 且}\int_{x\in\chi}h(x)m(dx)<\infty\} \tag{2.2}$$

對於每個 $j=1,\cdots,n$ ，我們定義在$(\chi\times R^d)\times M$上的隨機函數$P_\theta(\xi_0)$與$P_\theta(\xi_j)$為

$$P_\theta(\xi_0)h(x)=\int_{x\in\chi}f(\xi_0;\varphi_x(\theta))h(x)m(dx), \tag{2.3}$$

$$P_\theta(\xi_j)h(x)=\int_{y\in\chi}p_\theta(x,y)f(\xi_j;\varphi_y(\theta)|\xi_{j-1})h(y)m(dy). \tag{2.4}$$

定義這兩個隨機函數的合成函數為

$$P_\theta(\xi_{j+1})\circ P_\theta(\xi_j)h(x)= \int_{z\in\chi}p_\theta(x,z)f(\xi_j;\varphi_z(\theta)|\xi_{j-1}) \left(\int_{y\in\chi}p_\theta(z,y)f(\xi_{j+1};\varphi_y(\theta)|\xi_j)h(y)m(dy)\right)m(dz) \tag{2.5}$$

對 $h \in M$ ，令 $\|h\| := \int_{x\in\chi} h(x)m(dx)$ 代表 L^1-模(L^1-norm)，則(2.1)可表示為

$$
\begin{aligned}
&p_n(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n;\theta)\\
&=\int_{x_0\in\chi}\cdots\int_{x_n\in\chi}\pi_\theta(x_0)f(\xi_0;\varphi_{x_0}(\theta))\\
&\quad\prod_{j=1}^{n}p_\theta(x_{j-1},x_j)f(\xi_j;\varphi_{x_j}(\theta)|\xi_{j-1})m(dx_n)m(dx_0)\\
&=\|P_\theta(\xi_n)\circ\cdots\circ P_\theta(\xi_1)\circ P_\theta(\xi_0)\pi_\theta(x)\|
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

在隱馬可夫模型上，其中一個有趣的課題是，如何藉由一連串從系統中取得的觀測值為基礎，快速的偵測(且伴隨著低的警報率)模型(參數)的改變。這已經有許多應用在統計的品質管制，影像上的邊緣偵測與診斷電腦通訊網路中的元件的錯誤。這個領域中，Basseville 和 Nikiforov[2]給與一個綜合性的討論。亦可以參考 Lai[3]對於近來的文獻所進行的研究。

在狀態空間是有限個的情況下，Fuh[1]將概似函數表達為一個在 L^1-模下馬可夫隨機矩陣乘積的比率，並且基於隱馬可夫鏈的資料下，建立序列機率比檢定(sequential probability ratio test)的漸近最優，他亦研究 CUSUM 公式的性質並且在平均跑的長度(average run length, ARL)之限制下，提供一個漸近下界。這個結果即意味著在 ARL 限制下 CUSUM 公式所得到的漸近最優。

令 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是從一未知參數為 θ 的隱馬可夫模型 $\{\xi_n, n\ge 0\}$ 中所得到的觀測值。對固定的 $\theta_0,\theta_1\in\Theta$ ，令

$$
\begin{aligned}
S_n &:= \frac{p_n(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n;\theta_1)}{p_n(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n;\theta_0)}\\
&:= \frac{\sum_{x_0=1}^{d}\cdots\sum_{x_n=1}^{d}\pi_{x_0}(\theta_1)f(\xi_0;\varphi_{x_0}(\theta_1))}{\sum_{x_0=1}^{d}\cdots\sum_{x_n=1}^{d}\pi_{x_0}(\theta_0)f(\xi_0;\varphi_{x_0}(\theta_0))}\\
&\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n}p_{x_{k-1}x_k}(\theta_1)f(\xi_k;\varphi_{x_k}(\theta_1)|\xi_{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}p_{x_{k-1}x_k}(\theta_0)f(\xi_k;\varphi_{x_k}(\theta_0)|\xi_{k-1})}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

令 $\theta_0\in\Theta^0$ (Θ 的內部)，並且考慮檢定假設 $\theta\le\theta_0$ 的問題。給定 $\theta_1>\theta_0$ ，我們可以建構一序列機率比檢定 $\theta=\theta_0$ 與 $\theta=\theta_1$ 並且利用他來測試合成的假設 $\theta\le\theta_0$ 。則這個 $\theta=\theta_0$ 與 $\theta=\theta_1$ 的序列機率比檢定會停止抽樣在階段

$$
T := \inf\{n : \log S_n \le a \ \ or\ \ \log S_n \ge b\ \} \tag{2.8}
$$

對於 $a\le 0<b$ 。並且根據 $\log S_T\le a$ (或 $\log S_T\ge b$)，接受虛無假設 $\theta=\theta_0$ (或對立假設 $\theta=\theta_1$)是眞實的密度。當他被視為一 $\theta\le\theta_0$ 的檢定，SPRT 拒絕 $\theta\le\theta_0$ 若且為若 $\log S_T\ge b$ 。在這裡，這個問題有趣的地方在於估計型一誤差 $\alpha=P^{(\theta_0)}\{\log S_T\ge b\}$ ，型二誤差 $\beta=P^{(\theta_1)}\{\log S_T\le a\}$ 與檢定期望的樣本大小 $E^{(\theta_0)}T(E^{(\theta_1)}T)$ ，其中 $P^{(\theta)}(E^{(\theta)})$ 代表初始分配為平穩分配 $\pi_x(\theta)f(\cdot;\varphi_x(\theta))$ 的機率(期望值)。為了分析序列機率比檢定的性質，假設條件 C 成立。

C1. 在一個有限的狀態空間 $X=\{1,\cdots,d\}$ ，對於每個 $\theta\in\Theta$ ，馬可夫鏈 $\mathrm{X}=\{X_n, n\ge 0\}$ 是遍歷的(ergodic)(正遞迴的(positive recurrent)，不可縮減(irreducible)與不定期的(aperiodic))。此外，這個馬可夫鏈 $\{(X_n,\xi_n), n\ge 0\}$ 為 w-均勻遍歷的(w-uniform ergodic)，並且擁有平穩機率 Γ ，其在 μ 上機率密度為 $\pi_x(\theta)f(\cdot;\varphi_x(\theta))$ 。

C2. 對於每個 $\theta\in\Theta$ ，定義在(2.3)及(2.4)上的隨機矩陣 $M_0(\theta)$ 與 $M_1(\theta)$ 在 $P^{(\theta)}$ 上幾乎處處是可逆的，且

$$
\sup_{(x,\xi_0)\in D\times R}E_x^{(\theta)}\left|\sum_{x,y=1}^{d}\pi_x(\theta)f(\xi_0;\varphi_x(\theta))p_{xy}(\theta)\xi_1 f(\xi_1;\varphi_y(\theta)|\xi_0)\right|<\infty
$$

令 $\{\xi_n, n\ge 0\}$ 為一隱馬可夫模型，其轉移核(transition kernel)為(1.1)且滿足條件 C。考慮連續地檢定這個簡單假設的問題，去看是 $Q:=Q_\pi:=P_\pi^{(\theta_0)}$ 或是 $P:=P_\pi:=P_\pi^{(\theta_1)}$ 為 $\{\xi_n, n\ge 0\}$ 的推移核密度。令 S_n 為基於 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$ 下的概似比，如同(2.7)的定義。

令 $J(\alpha,\beta)$ 代表檢定 (N,δ) 的集合，其型一錯誤與型二錯誤機率是分別被限制在 α 與 β 之下，其中 N 代表停止的規則，而 δ 為此檢定的終止決定規則。當 $\{\xi_n, n\ge 0\}$ 為一隱馬可夫模型，我們利用當 $b\to\infty$ 與 $a\to-\infty$ ，對於所有的 $(N,\delta)\in J(\alpha,\beta)$ 其 $\int NdP_v$ 與 $\int NdQ_v$ 的最大下界，可以漸近地達到(伴隨著至少一個 $O(1)$ 不一致)的概念來證明 SPRT 是漸近最優。

現在，令 π 表示在 P 測度之下的平穩分配

$\mathrm{X}=\{X_n, n\geq 0\}$，且令$\pi'$表示在$Q$測度之下的平穩分配$\mathrm{X}=\{X_n, n\geq 0\}$。

定義 Kullback-Leibler 資訊編號(Kullback-Leibler information numbers)為

$$K(P,Q)=E_P\left[\log\frac{\|M_1M_0\pi\|}{\|M_1'M_0'\pi'\|}\right]$$

$$K(Q,P)=E_Q\left[\log\frac{\|M_1'M_0'\pi'\|}{\|M_1M_0\pi\|}\right] \tag{2.9}$$

其中$E_P(E_Q)$表示在$P(Q)$機率下，馬可夫隨機矩陣之推導乘積(induced products)的期望值。

定理 1 令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$為一從滿足條件C的隱馬可夫鏈$\{\xi_n, n\geq 0\}$所取出之隨機變數的序列。假設$K(P,Q)>0,\ K(Q,P)>0$且$\sup_x\left\{\int(\log S_1)^2dP+\int(\log S_1)^2dQ\right\}<\infty$. 則當$b\to\infty$與$a\to-\infty$時，

$$\int TdP=\inf_{(N,\delta)\in J(\alpha,\beta)}\int NdP+O(1)$$
$$=(1-\beta)b/K(P,Q)+O(1),$$
$$\int TdQ=\inf_{(N,\delta)\in J(\alpha,\beta)}\int NdQ+O(1)$$
$$=(1-\alpha)|a|/K(Q,P)+O(1),$$

令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{\omega-1}$為一從參數未知為$\theta_0$的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$所取出的觀測值，且令$\xi_\omega,\xi_{\omega+1},\cdots$為一從參數未知為$\theta_1$的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$所取出的觀測值。我們將利用$P^{(\omega)}$來代表這樣的機率測度(改變時間為$\omega$)與利用$P_0$來代表$\omega=\infty$的情況(沒有改變點)。回想$P^{(\omega)}$與$P_0$代表馬可夫隨機矩陣$\{((X_n,\xi_n),M_n\cdots M_0),n\geq 0\}$之導出乘積(induced products)的機率。對於所有$\theta_0,\theta_1\in\Theta$，令$S_n\pi$定義如(2.7)。定義 CUSUM 公式

$$\tau:=\inf\left\{n:\max_{1\leq k\leq n}(\log S_n-\log S_k)\geq c_\gamma\right\} \tag{2.10}$$

其中c_γ被選定，使得$E_0\tau=\gamma$。這裡與接下來的文章中，我們定義$\inf\phi=\infty$。當ω是有限的，我們考慮條件期望的延遲為$E^{(\omega)}[(\tau-\omega+1)^+|\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{\omega-1}]$，它的最小上界超過$\{\omega,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{\omega-1}\}$代表最壞的延遲情況。更精確的說，我們想要證明當$\gamma\to\infty$時，CUSUM 公式$\tau$漸近地最優化：

$$\bar{E}_1N=\sup_{\omega\geq 1}ess\sup E^{(\omega)}[(N-\omega+1)^+|\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{\omega-1}] \tag{2.11}$$

對於所有公式N伴隨著$E_0N\geq\gamma$

現在令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{\omega-1}$為從機率$P$下的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$中得到的觀測值，而$\xi_\omega,\xi_{\omega+1},\cdots$為從機率$Q$下的隱性馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$中得到的觀測值。令$K$是時間$\omega$的最大概似估計法(maximum likelihood estimate)。因 CUSUM 概似比公式(2.11)相當於當單邊的 SPRT 顯示顯著的證據去反對虛無假設$H_0:P^{(\theta)}=P$時停止。此單邊的 SPRT 擁有一個基於$\xi_K,\xi_{K+1},\cdots$下的 log-邊界c_γ。

由於(X_0,ξ_0)的初始分配為平穩分配$\pi_x(\theta)f(\cdot;\varphi_x(\theta))$，則$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$構成一個平穩序列，且 CUSUM 公式(2.10)可被表為

$$\tau:=\min_{k\geq 1}\{T_k+k-1\} \tag{2.12}$$

其中T_k為基於在$\xi_k,\xi_{k+1},\cdots$的單邊 SPRT 之停時(stopping time)。

接下來的定理建立了在 ARL 的限制$E_0N\geq\gamma$下，$\bar{E}_1N$的漸近下界$(K(P,Q)^{-1}+o(1))\log\gamma$。

定理 2 令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$是從符合條件C的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$中所得到之一序列的隨機變數，則當$\gamma\to\infty$，

$$\inf\{\bar{E}_1N:E_0N\geq\gamma\}\geq(K(P,Q)^{-1}+o(1))\log\gamma \tag{2.13}$$

定理 3 令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$是從符合條件C的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$中所得到之一個序列的隨機變數。令N為一根據$\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$延伸的停止變數，使得$P_0(N<\infty)\leq\alpha$。對$k=1,2,\cdots$，令N_k代表從應用N在$\xi_k,\xi_{k+1},\cdots$上的停時，並且定義$N^*=\min_{k\geq 1}\{N_k+k-1\}$。則$N^*$是一個停時，且

$$E_0N^*\geq 1/\alpha \tag{2.14}$$

定理 4 令$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$為一從符合條件C的隱馬可夫模型$\{\xi_n, n\geq 0\}$中所得到之一序列的隨機變數，令N^*被定義如定理 3。則當$\gamma\to\infty$，

$$\overline{E}_1 N^* \le (K(P,Q)^{-1} + o(1))\log\gamma \qquad (2.15)$$

定理 1-4 來自於 Fuh[1]。定理 1 建立了 SPRT 之漸近最優(asymptotic optimality)；同時定理 2 建立了達到在偵察延遲的漸近下界的 CUSUM 程序。定理 3 與 4，我們證明了在 ARL 的限制下，CUSUM 程序的漸近最優。

三、馬可夫隨機漫步

在第二節中，我們確定隱馬可夫模型的有效估計量的極限性質。在這一節中，我們探討 Wald 方程與馬可夫隨機漫步的更新理論。詳細內容可參見 Fuh and Lai [4,5]。

考慮在一個在一般狀態空間 X 有 σ-域 A 之不可縮減(irreducible)與不定期的(aperiodic)的馬可夫鏈 $\{X_n, n\ge 0\}$，其中不可縮減(irreducible)是在 A 上最大不可縮減的測度。假設一可加的部分 $S_n = \sum_{k=0}^n \xi_k$，其中 $S_0 = \xi_0 = 0$，取值在實數線 R，使得在 $X\times R$ 上，$\{(X_n, S_n), n\ge 0\}$ 是一個馬可夫鏈，且

$$\begin{aligned} &P\{(X_{n+1}, S_{n+1}) \in A\times(B+s) \mid (X_n, S_n) = (x,s)\} \\ &= P\{(X_1, S_1)\in A\times B \mid (X_0, S_0) = (x,0)\} \\ &= P(x, A\times B) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

對於所有 $x\in D, s\in R, A\in$ A, $B\in B$ (:=在 R 上的 Borel σ-域)。此鏈 $\{(X_n, S_n), n\ge 0\}$ 稱為一個馬可夫隨機漫步。

令 $\{(X_n, S_n), n\ge 0\}$ 為在 $\chi\times R^d$ 上的一個馬可夫隨機漫步。令 $w:\chi\to[1,\infty)$ 為一個可測的函數且令 **B** 是可測函數 $h:\chi\to C$ (:= 複數的集合)，$\|h\|_w := \sup_x |h(x)|/w(x) < \infty$ 的 Banach 空間。馬可夫鏈 $\{X_n, n\ge 0\}$ 是假設為不可縮減(在 A 上的測度)，不定期且 w-均勻地遍歷的(w-uniformly ergodic)，即存在一個不變機率測度 π 使得 $\int w(y)d\pi(y) < \infty$ 且

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left| E_x(h(X_n)) - \int h(y)d\pi(y) \right| / w(x) : x\in\chi, |h|\le w \right\} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\sup_x \{E_x(w(X_1))/w(x)\} < \infty \qquad (3.3)$$

並假設對某些 $r\ge 2$，

$$\sup_x \left\{ E_x(|\xi_1|^r w(X_1))/w(x) \right\} < \infty \qquad (3.4)$$

當 $d=1$，令 ν 為在 X_0 上的初始分配，且 E_ν 代表初始分配 ν 的期望值。若 ν 退化成 x，我們將 E_ν 寫成 E_x。對於狀態空間 X 上有界測度函數的空間 B 之參數 $\theta\in R$，定義線性算子 P_θ 和 P，

$$(P_\theta h)(x) = E[h(X_1)e^{i\theta\xi_1} \mid X_0 = x],$$

$$(Ph)(x) = E[h(X_1) \mid X_0 = x] \qquad (3.5)$$

則 P_θ 和 P 是有 sup-norm 的 Banach 空間有界線性算子。並且存在充分小的 $\eta > 0$ 使得對於 $|\theta|\le\eta$，P_θ 的範圍是介在兩個圓

$$C_1 = \{z : |z-1| = (1-\rho)/3\}$$

$$C_1 = \{z : |z| = \rho + (1-\rho)/3\}$$

因此由光譜分解定理知，$B = B_1(\theta)\oplus B_2(\theta)$，且存在 $0<\delta\le\eta$ 使得對於 $|\theta|\le\delta$，$B_1(\theta)$ 是一維度，且

$$P_\theta\pi_\theta h = \lambda(\theta)\pi_\theta h \quad for\ h\in B \qquad (3.6)$$

其中 $\lambda(\theta)$ 為固有空間 $B_1(\theta)$ 下 P_θ 的固有值，且 π_θ 是 B 在 $B_1(\theta)$ 的子空間上在 $B_2(\theta)$ 的方向的平行投影。令 $h_1\in B$ 是常數函數 $h_1\equiv 1$ 且令 $r(x;\theta) = (\pi_\theta h_1)(x)$。根據(3.6)式，$r(\cdot;\theta)$ 是一個 P_θ 的固有函數，其固有值為 $\lambda(\theta)$。也就是 $r(\cdot;\theta)$ 產生了一維的固有空間 $B_1(\theta)$。

固定 $x\in X$, $r(\cdot;\theta)$ 是一個 θ 的連續函數且 $r(x;\theta)=1$。對於 $k=1,2,\cdots$，若 $\sup_x E_x|\xi_1|^k < \infty$，則 $\lambda(\theta)$ 與 $r(x;\theta)$ 在 $\theta=0$ 的附近為 k 階連續可微，且 $\sup_x \left|(\partial^k/\partial\theta^k) r(x;0)\right| < \infty$。我們利用這個結果證明 Wald 方程中關於馬可夫隨機漫步的結果。令 $\dot r$ 和 $\ddot r$ 表示 r 對於 θ 的一階與二階導數。

定理 5 令 ν 為 X_0 的初始分配且 T 為一停時使得 $E_\nu T < \infty$。

(i) 假設 $\sup_x E_x|\xi_1| < \infty$ 且令 $\mu = E_\pi\xi_1$。則 $E_\nu S_T = \mu E_\nu T + E_\nu\{\Delta_1(X_T) - \Delta_1(X_0)\}$ 其中 $\Delta_1(y) = i\dot r(y;0)$ 為實數值。

(ii) 假設 $\sup_x E_x\xi_1^2 < \infty$ 且令 $\sigma^2 = Var_\pi\xi_1$。則

$$\begin{aligned} &E_\nu(S_T - \mu T)^2 \\ &= \sigma^2 E_\nu T - 2E_\nu\{(S_T-\mu T)\Delta_1(X_T)\} \\ &\quad + E_\nu\{\Delta_2(X_T) - \Delta_2(X_0)\} \end{aligned} \qquad (3.7)$$

其中$\Delta_2(y)=\ddot{r}(y;0)$爲實數值。

當$d>1$，令$\mu=E_\pi\xi_1$且$V=\lim_{n\to\infty}n^{-1}E_\pi\{(S_n-n\mu)(S_n-n\mu)'\}$，這是在(2.1)和(2.3)式下被明確定義的。令$S_{n,j}$(或是$\xi_{n,j},\mu_j,\theta_j$)表示在d維度向量S_n(或是ξ_n,μ,θ)的第j個維度。假設$\mu_1>0$。爲了不失一般性，我們假設V爲正定(也就是說，在π下，ξ_n是嚴格d維度)，否則我們能考慮另外一較低維度的子空間。在$d>1$情況，定義

$$\gamma=E_\pi\{(\xi_{n,2}/\mu_1,\cdots,\xi_{n,d}/\mu_1)'\},$$

$$\widetilde{V}=(-\gamma,I_{d-1})V\begin{pmatrix}-\gamma'\\ I_{d-1}\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

其中I_k是$k\times k$的單位矩陣。注意$\widetilde{V}$是$\{(S_{n,2},\cdots,S_{n,d})'-S_{n,1}\gamma\}/\sqrt{n}$的漸近共變異矩陣(asymptotic covariance matrix)(在P_π下)。對於$s\in R^d$，定義$\widetilde{s}=(s_2,\cdots,s_d)'-s_1\gamma$。

首先考慮ξ_n獨立同分配的清況，且$d>1$及$S_0=0$。更新測度定義爲$U(B)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{S_n\in B\}$，多變量更新理論關心的是當$s_1\to\infty$時，以$\Psi_k(s+\cdot)$近似$U(s+\cdot)$，其中$\Psi_k$爲一在$R^d$上的$\sigma$-有限測度，其在 Lebesgue 測度上的密度函數(即 Radon-Nikodym 導數)，形式爲

$$\psi_k(s)=\frac{1}{\mu_1\sqrt{\det\widetilde{V}}}\left(\frac{\mu_1}{2\pi s_1}\right)^{(d-1)/2}e^{-\mu_1\widetilde{s}'\widetilde{V}^{-1}\widetilde{s}/2s_1}\left\{1+\sum_{j=1}^{k}s_1^{-j/2}\omega_j(\widetilde{s}/\sqrt{s_1})\right\} \tag{3.9}$$

此處$s_1>0$。對於$s_1\le 0$，其$\psi_k(s)=0$，其中$\omega_j(u)=\sum_{l=0}^{n_j}q_l(u)$且$q_l(u)$爲在$u$上的一個階數爲$l$的多項式，其係數爲$(1-Ee^{i\theta'\xi_1})^{-1}$在靠近$\theta=0$的泰勒展開式所組成。對於馬可夫隨機漫步，更新測度包括的不只是$\{S_n\}$且爲$\{X_n\}$。對於$A\in\mathrm{A}$和$B\in\mathrm{B}$，定義

$$U_\nu^A(B)=\sum_{n=0}^{\infty}P_\nu\{X_n\in A,S_n\in B\} \tag{3.10}$$

我們能藉著$\pi(A)\Psi_k^{A,\nu}(s+\cdot)$來近似$U_s^A(s+\cdot)$，其中$\Psi_k^{A,\nu}$是$R^d$上的$\sigma$-有限測度，其在 Lebesgue 測度上之密度函數爲$\psi_k^{A,\nu}$，而對於$s_1\le 0$，$\psi_k^{A,\nu}(s)=0$，且對於$s_1>0$，$\psi_k^{A,\nu}(s)$在(3.9)式中已經得到，

其中多項式的係數$\omega_1(\widetilde{s}),\cdots,\omega_k(\widetilde{s})$與$A$和$\nu$藉由$U_\nu^A$的傅立葉轉換在靠近原點的泰勒展開式有關，

假設

$$E_\nu\left\{w(X_1)(1+|S_1|^r)\right\}<\infty \tag{3.11}$$

對於某些充分大的r(和k有關)。我們證明下列有界的多維更新過程定理，當$s_1\to\infty$以$\pi(A)\Psi_k^{A,\nu}(s+\cdot)$近似$U_s^A(s+\cdot)$的餘數(remainders)之過程。

定理 6 令$k\ge 1$且令$\{(X_n,S_n),n\ge 0\}$爲一強非格子馬可夫隨機漫步(strongly nonlattice Markov random walk)，對於那些(3.11)式中$r>k+5+\max\{1,(d-1)/2\}$。令$A\in\mathrm{A}$和B爲一d-維矩形$\prod_{j=1}^{d}[\alpha_j,\beta_j]$。則當$s_1\to\infty$，

$$U_\nu^A\left(s+\begin{pmatrix}0\\ s_1\gamma\end{pmatrix}+B\right)=\pi(A)\Psi_k^{A,\nu}\left(s+\begin{pmatrix}0\\ s_1\gamma\end{pmatrix}+B\right)+o(s_1^{-(d-1+k)/2})$$

均勻地在$\widetilde{s}$內。

定理 7 令$\{(X_n,S_n),n\ge 0\}$爲一強非格子馬可夫隨機漫步，對於那些(3.11)中$r>3$。令$h>0$，且$\alpha>0$。令B_α爲在R^{d-1}上所有的 Borel-子集的集合，使得當$\varepsilon\downarrow 0$時，$\int_{(\partial B)^\varepsilon}\exp(-|y|^2/2)dy=O(\varepsilon^\alpha)$，其中$\partial\mathrm{B}$表示B的邊界且$(\partial\mathrm{B})^\varepsilon$表示它的$\varepsilon$-鄰近區域($\varepsilon$-neighborhood)。則當$s_1\to\infty$時，

$$U_\nu^A\left([s_1,s_1+h]\times\sqrt{s_1}(s_1\gamma+C)\right)=\pi(A)\Psi_1^{A,\nu}\left([s_1,s_1+h]\times\sqrt{s_1}(s_1\gamma+C)\right)+o(s_1^{-(1+\delta)/2})$$

對於每個$\delta<\min(1,r-3)$，均勻地在$A\in\mathrm{A}$和$C\in\mathrm{B}_\alpha$。

在 d=1 的情況下，V爲一純量，表示成σ^2。下列定理提供了當$b\to\infty$時，$U_\nu^A[b,b+h]$與更新理論近似值(renewal-theoretic approximation)差距的界線。

定理 8 假設$d=1$且$\{(X_n,S_n),n\ge 0\}$爲一個強非格子之馬可夫隨機漫步，對於那些(3.11)式中$r\ge 2$。當$b\to\infty$，

$$U_{\nu}^{A}\left[b,b+h\right]=\pi(A)h/\mu+o(b^{-(r-1)})$$

均勻地在 $A \in \mathrm{A}$ 。

參考文獻

[1] C. D. Fuh, *Annals of Statistics*, **31**, 942 (2003).

[2] M. Basseville and I. V. Nikiforov *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1993).

[3] T. L. Lai, *J. R. Statist. Soc. B*, **57**, 613 (1995).

[4] C. D. Fuh and T. L. Lai, *J. Appl. Probab*., **35**, 566 (1998).

[5] C. D. Fuh and T. L. Lai, *Adv. Appl. Prob*., **33**, 652 (2001).