廣義離散型週期系統之控制與混沌連結動態系統之同步控制及應用

清華大學數學系　林文偉

一、廣義離散型週期系統之控制

最近十多年來國際間對於源自於多重樣本數據系統，化學反應，週期時變濾波及網路系統等所導出的廣義離散型週期系統產生濃厚的研究興趣。此廣義離散型週期系統可以描述如下:

$$E_k x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k ,\quad y_k = C_k x_k . \tag{1}$$

此處 u_k 爲一控制向量，E_k 及 A_k 爲 p-週期的 n 維矩陣且 E_k 可以允許是奇異的。更進一步，我們常在限制在系統(1)的限制條件下求取下列成本函數之最佳控制：

$$\min u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^T C_k^T C_k x_k + u_k^T R_k u_k\right) \tag{2}$$

其所對應的週期離散型 Riccati 方程(P-DARE)表現爲

$$E_k^T X_{k-1} E_k = A_k^T X_k A_k - A_k^T X_k B_k \left(R_k + B_k^T X_k B_k\right)^{-1} B_k^T X_k A_k + C_k^T C_k , \tag{3}$$

對 k=1, …, p，而(1) (2)式的最佳控制是由下式給出：

$$u_j^* = -\left(R_j + B_j^T X_j B_j\right)^{-1} B_j^T E_j X_j A_j x_j , \tag{4}$$

此處 $\{X_k\}_{k=1}^{P}$ 是(3)式的半正定週期解集。在研究矩陣方程及特徵值問題中，矩陣方程的解和特徵值及不變子空間的擾動分析是檢驗擾動解是否可靠最重要的一環，進而在發展有效數值方法上提供重要的依據。因此，我們首先針對系統(1)所對應的週期矩陣對 $\{(A_k, E_k)\}_{k=1}^{P}$ 的廣義特徵值及廣義週期不變子空間對的擾動界及條件數給出嚴格的誤差分析。接著再針對週期 Riccati 方程(3)，先構造出一序列的線性算子將擾動的週期 Riccati 方程表現出來，再估計半正定週期擾動解及原始解的擾動上界及條件數。除此之外，在實際的應用上，通常週期的矩陣對 $\{(A_k, E_k)\}_{k=1}^{P}$ 爲非正則性，即它可能有連續的特徵譜。因之系統(1)可能會有無窮多解(不合理)。另外，矩陣對 $\{(A_k, E_k)\}_{k=1}^{P}$ 的 Index 也可能大於 1。如此一來，數學上包含有 delta-函數的唯一解可能存在，但在工程上有脈衝解是不許可的。因此，我們利用了狀態及導數回授控制方式將系統(1)正規化及保持 Index 至多爲 1，並給出其可行解的充分及必要條件。打開了對廣義週期系統(1)的控制問題研究的基石。

另外，在離散型或連續型競爭系統所導出的 H_∞ 控制問題，發展穩健有效的設計方法，使得控制器是可以達到所預期的的最佳控制是重要課題。我們對控制器的存在性，設計可靠性，演算法及誤差估計提出了詳細的分析，數值方法均通過嚴格的測試，是目前 H_∞ 控制領域中可靠的方法。我們再配合爲求解 Riccati 方程而需求解其所對應之 Hamiltonian 或 Symplectic 矩陣對的 Lagrangian 不變子空間，而給出了 Lagrangian 子空間存在的充要條件，並且發展出了一套穩健的計算方法，可以有效求解具有純虛根或有單位圓上根的 Lagrangian 子空間，進而可以解出 Riccati 方程的半正定解。是目前唯一被提出的數值方法。

至於在超大型的 Riccati 方程求解方面，因爲 Riccati 方程本身具有很好的結構性，若採用一般非保持結構的數值方法求解，會因爲結構性的破壞而產生精確度的流失。我們對此發展了保持結構的 J-Lanczos 法及 Structure-Preserving Arnoldi 數值方法，可以有效且快速的求解，改良了一般非保持結構方法的缺點。

本節中所論述重要的代表作可以參考[1,2,3]。

二、混沌連結動態系統之同步控制及應用

自從 1990 年 Pecora 及 Carroll 在 PRL 首先提出了混沌同步的論文之後，此概念就廣泛的被物理界及工程界積極的研究。並在保密通訊，生物系統及電子電路系統等領域中蓬勃發展，得出許多重要的應用。基於此觀念，我們也首先在連結雷射二極體上發現混沌同步現象，並成功地應用在 AM，FM 及 digit 保密訊號通訊上。而針對廣義的混沌同步，近似同步，拓樸同步等的數學理論，因其連結的方式不同及混沌子系統的不同而顯現有相當的困難程度。再此，我們考慮一般的連續型及離散型的連結網路混沌系統如下：

(連續型)

$$\dot{X}_k = f_k(X_k, t) + c(LX)_k, \quad k = 1, \cdots, N \tag{4}$$

此處 $X_k \in R^2$ 或 R^3， $X = (X_1^T, \cdots, X_N^T)^T$ ，L 是一適當的連結線性算子，而 c 是一連結係數。

(離散型)

$$x_k(i+1) = f_k(x_k(i)) + c(Lx)_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

此處 $x_k(i) \in R,\ x = (x_1, \cdots, x_k)^T$, L 及 c 同上。

在系統(4)或(5)爲有界耗散條件下，我們可以定義滿足下式爲同步(或近似同步)：

(連續型)

$$|Z_k(t) - Z_l(t)| \to 0 \quad (\text{或} O(\varepsilon)), \text{當 } t \to \infty, k \neq l,$$

(離散型)

$$|x_k(i) - x_l(i)| \to 0 \quad (\text{或} O(\varepsilon)), \text{當 } i \to \infty, \ k \neq l.$$

針對連續型部分連結網路配以不同的 Dirichlet、Nenmann 或 periodic 邊界條件，我們針對不同的混沌子系統如 Duffing、van der Pol、廣義二階振盪子及 Lorenz 方程等，嚴格證明了當連接係數充分大時會有同步或漸近同步的現象發生。其中，連結係數與子系統的個數 N 有關，其最小上界估計幾乎達到緊密。而針對離散型的連結網路混沌系統，我們考慮研究以週期邊界條件連結的混沌 logistic 映射子系統的同步行爲。因爲離散型連結系統的同步與其線性化矩陣的特徵根是否在單位圓內有關，其證明完全不同於連續型中的連結係數 c 爲充分大。因此我們針對 N=4 及 5 構造了一個特殊 Lyapunov 函數來證明其有混沌同步發生。本方法的技巧是首先在此領域中提出，可奠定往後證明混沌同步或混沌控制現象的基礎。

本節所論述的重要的代表作可以參考 [4,5,6]。

參考資料

[1] W. W. Lin, C. S. Wang and Q. F. Xu, *SIAM, Num. Anal.*, **38**, 515 (2000).

[2] W. W. Lin, and J. G. Sun, *SIAM matrix anal. Appl.*, **24**, 411 (2002).

[3] T. M. Huang, W. W. Lin and V. Mehrmann, *SIAM Sci. Comp.*, **24**, 1283 (2003).

[4] T. M. Huang, C. Juang, J. Juang and W. W. Lin, *IEEE J. Quantum Elec.*, **36**, 300 (2000).

[5] W. W. Lin and C. C. Peng, *Physica D*, **166**, 29 (2002).

[6] W. W. Lin and Y. Q. Wang, *SIAM Appl. Dyn. Syst.*, 1, 175 (2002).