代數流形的退化及其模空間的完備化問題

清華大學數學系　王金龍

一、前言

在多複變幾何與代數幾何學的研究中，我們探討的基本對象是具有解析或代數結構的光滑流形。研究流形常須借助於對其某一類「退化過程(degenerations)」的了解，或依賴於其退化後的「奇異點」的分類。甚至要概略知道所有演化的過程，即其模空間(moduli spaces)。本文的主旨在以淺近文字描述這類問題的歷史發展(1,2,3)，以及報告最近個人的研究心得(4,5)。

1. 複流形，度量結構，代數流形與極小模型

自 Riemann 以降，研究幾何空間不外乎賦予流形一個度量機制。在微分幾何用的是 Riemannian metric，在代數幾何用的是較弱的 polarization。透過這個機制我們可測各類子流形的大小並刻畫一些特殊子流形。當然流形上尚有其他細部結構如逐點的體積密度或是解析結構。多數情況下解析結構與某一類特殊度量可以相互決定對方。在二維曲面中，這是黎曼面分類的基礎。這裏的特殊度量為具常數 Gauss 曲率的度量，而解析結構即一維緊複流形，或稱複代數曲線。

在高維度空間裏，Einstein 的廣義相對論揭示了考察具常數 Ricci 曲率的度量(通稱 Einstein metric)的重要性。但到 50 年代 Calabi 才明確指出 Einstein metric 與代數結構的對應關係。Calabi的對應在70年代中期為Yau(丘成桐)所證明。其中一類流形具有 the first Chern (陳省身) class 為零者 Yau 證明了存在唯一的 Ricci flat metric 於每一固定的 polarization 中。這類流形現今稱作 Calabi-Yau 流形。它們可視為一種「真空狀態」或者「最小空間」。至今，研究 Calabi-Yau 流形成為代數幾何學與物理弦理論中最核心的課題之一。

從代數的觀點則有另一支主流。二十世紀初，義大利幾何學派便著手分類代數曲面。和曲線的最大差異在於曲面上的全體有理函數並不能唯一決定該曲面。具同構有理函數體的流形間僅能斷言他們相異於較低維度的子流形上。Castelnuovo 與 Enrique 提出了「極小模型(minimal models)」的概念來作為挑選最佳代表的準則。blowing-up 是最基本的雙有理映射，即將空間中的一點取代為以該點出發的所有方向。Castelnuovo 的主要發現是在曲面時其反向操作 blowing-down：具有自交數–1 的射影直線可代數地收縮至一個光滑點。重複這個步驟有限次後便得到極小模型。Enrique 則進一步將極小模型做細部分類。

80 年代初 Mori 發現這個方法在高維度空間中的推廣。Mori 發現極小模型即 Ricci 曲率半負定的空間。其構造方法係斷言空間中「正曲率區域」必含有可代數收縮的球面。然而過程中將產生奇異點。某些奇異點甚至導致收縮的步驟無法繼續。這時稱為 flip 的手術過程就必須被引入。在多人努力的基礎下，Mori 於 1988 完成三維 flip 的存在性證明，從而建立複三維極小模型理論：對任一三維代數流形，若該流形不為其內的射影直線所覆蓋，則它可透過代數收縮及 flips 轉化為極小模型。92 年 Miyaoka 與 Kawamata 進一步證明三維的 abundance 定理以將極小模型分解成負 Ricci 曲率為底的 Calabi-Yau 纖維空間。

2. 模空間及其構造方法，擬射影結構與典型奇異點

模空間係刻劃「流形中某種結構所有可能的變動」的參數空間。我們感興趣的是固定 polarization 下的所有代數結構。對於 Kaehler-Einstein 流形，這等價於考察所有的 Kaehler-Einstein 度量。研究模空間即研究流形的演化(deformations)。代數曲線的模空間研究始自 Riemann。他證明 genus g 的曲線的模空間 M(g) 維度為 3g–3。其解析結構的探討則要到

Teichmuller 才開始。其代數結構的研究始於 Grothendieck。70 年代 Deligne 與 Mumford 證明了 M(g, n) (genus g curves with n marked points) 可為一射影代數流形的 Zariski 開集，其邊界對應於一類退化曲線稱為 stable curves。M(g, n) 的精確結構如拓樸上同調環於 80 年代為 Witten 所發現。至今已有嚴格的數學證明。

高維度流形的模空間研究始於 50 年代的 Kodaira-Spencer 理論。奠基於此，其局部解析結構已為 Kuranishi 運用非線性橢圓偏微分方程所完成。這個技巧是日後許多幾何非線性問題的範例，如 80 年代 Donaldson 的 gauge theory。Griffiths 與 Schmid 於 70 年初發展 Hodge 結構變分理論 (VHS) 以研究模空間的整體解析結構。其兼具十九世紀的 Abel-Jacobi 週期積分以及 Teichmuller 的精神，並結合了拓樸，微分幾何，複分析，調和分析，李群種種現代數學方法，稍後我們會回到這個微分幾何觀點來繼續探討。

Grothendieck 於 60 年代將 Kodaira-Spencer 理論代數化，並融入其恢弘的現代代數幾何體系內。配合其 Hilbert scheme 理論，這構成了模空間理論的兩大碁石。在一個固定的射影空間中，Hilb(h)參數化所有具相同 Hilbert 多項式 h(n) 的代數子流形。研究(X, L)的模空間(L 為 polarization)係將(X, L)及其演化透過線叢 mL 所界定的有理函數(m 須為固定整數)崁入另一個固定的 N 維射影空間中。則模空間 M(X, L) = S/G。其中 S 為 Hilb(h)中對應到光滑流形且在代數群 G = PGL(N)作用下穩定的 Zariski 開子集。h(n) = χ(X, nL)。而 G 則將同一(X, L)但以不同方式崁入視為等價。Matsusaka 證明了 m 的存在性。而穩定集 S 的意義及其探討則是屬於 Mumford 著名的幾何不變量理論 (GIT)。

Mumford 驗證了曲線與 Abelian varieties 的穩定性。Gieseker 驗證了一般型式曲面的穩定性。但在高維度裏，最佳結果則是 Viehweg 在 80 年代末的「極小模型的模空間理論」。他找到較易檢驗的穩定性判定法並證明在 canonical bundle 為 semi-ample 時，其模空間存在射影緊緻化(quasi-projective)。根據 Mori 的理論，極小模型可能帶有一些「細微奇異點(terminal singularities)」。這包含於稍大一類的「典型奇異點(canonical singularities)」中。Viehweg 僅需假定這些奇異點在擾動下不至於變的更糟便可將其定理推至含奇異點的情形。這個假定稍後被 Kawamata 運用 Siu(蕭蔭堂)的新技術所解決。至此，極小模型的模空間理論可說完成了一半。剩下的則是模空間的「幾何緊緻化」問題。正如曲線中的 stable curves，甚麼才是極小模型模空間的邊界上該對應的奇異流形呢?

典型奇異點等同於說空間的全純體積有限。二維時，典型奇異點均形如 C^2/G (G 為 SL(2, C) 的有限子群)，其與光滑點在雙有理義意下等價。一般而言典型奇異點沒有完整的分類理論，但卻是極小模型理論能運作的恰當範疇。倘使考慮由多個同維分量所構成的奇異空間，則典型奇異點可推廣為「semi-log 典型奇異點」。由於 n + 1 維的極小模型理論可以用來分析 n 維極小模型的退化，90 年代初 Kollar 與 Shepherd-Barron 便得以使用三維理論證明 Gieseker 的曲面模空間可加入具 semi-log 典型奇異點的「穩定曲面」而獲致幾何的射影緊緻化。

3. 雙有理模空間與 Calabi-Yau 模空間

三維極小模型並不唯一。這個缺憾在 1987 被 Kawamata 及 Kollar 填補起來。他們證明雙有理極小模型間必可找到一串有限的手術過程稱為 flops 將一個轉變至另一個。不但如此，他們的拓樸上同調群及其 Hodge 結構以及奇異點均不會改變。(前兩個不變性在高維度時後來為筆者所證明。) 1992 年 Kollar 和 Mori 進一步證明 flop 可以在演化過程中連續地操作。這說明了相異的雙有理極小模型擁有相同的模空間。「雙有理模空間」這個新概念從此誕生。

事實上 Kollar 和 Mori 證明了更一般的 log-flip 的存在性並將其分類。其基礎是三維細微奇異點的分類(由 Reid 與 Mori 所完成)。因此許多人曾認為四維的極小模型理論不可能實現。與此同時 Shokurov 亦發表了 log-flip 的存在性證明。他的方法並不強烈依賴於奇異點的分類。最近 Shokurov 更宣稱四維 log-flip 的存在性。這項成就若真則將給予我們研究三維流形模空間的基礎。

對於一個給定流形，我們常難描述其模空

間的細部結構。除了曲線外，可能只有 K3 曲面我們了解較多。而其理由在其複結構模空間可用 Kaehler-Einstein 度量的模空間來探討。其中 Calabi-Yau 又更容易，因其模空間與 Kodaira-Spencer 理論及 VHS 理論有更直接的關聯。注意到 Calabi-Yau 模空間是第一個值得深入研究的雙有理模空間。

Calabi-Yau 流形可依其 holonomy 群分爲三類：平滑環面，unitary (SU)與 hyperkaehler (Sp) 流形。指標性結果有：

I: Bryant-Griffiths 證明：透過 period map，三維 Calabi-Yau (SU) 的模空間局部同構於 period domain 中的極大水平截面。他們並且給出這些截面的局部解析座標表示式。Mirror Symmetry 中的 Yukawa coupling 便是他們提出的。

II: Bogomolov-Tian-Todorov (BTT)定理：利用 Yau 的 Ricci flat 度量，Tian 將 Bogomolov 關於 hyperkaehler 流形的局部模空間「無障礙定理」推廣至所有的 Calabi-Yau 流形。這是一個「演化障礙群」非零，但所有障礙類均零的範例。

III: Viehweg：前述之 quasi-projectivity 定理。

IV: Huybrechts 將 K3 的許多結果推廣至 Sp 型模空間，如 surjectivity of period map。他並證明雙有理的 hyperkaehler 流形必有相同的實流形結構。一如 K3，他們的模空間是一類對稱空間。

判定非緊複流形是否能被射影緊緻化是一個自 Kodaira 證出其著名的崁入定理後幾何學家最感興趣的問題之一。此探討始於 Siu 與 Yau。目前 Mok-Zhang 與 Young 只需要求流形具有完備的 Kaehler 度量，有限體積，負 Ricci 曲率以及有界的高斯-黎曼曲率就可緊緻化。模空間有什麼度量能適用於這些條件呢？

4. 模空間的 Weil-Petersson 度量，完備性及曲率特性

對於 Kaehler-Einstein 模空間，古典的 Teichmuller 空間上的 Weil-Petersson 度量有一直接推廣 G。由於 G 測量 Kaehler-Einstein 度量 ω 的變分，它顯然主宰著模空間 M 上的重要訊息。在 Ricci(ω)非零時，Siu 曾推廣 Royden 和 Wolpert 在 Teichmuller 空間上的結果去計算 G 及其曲率。但是我們並不清楚如何去運用這些計算結果。我們甚至不知道 G 是否完備。事實上對 M(g)，g 至少爲 2 時，其 Weil-Petersson 度量並不完備。但是 M(g)在其緊致化空間中是擬緊緻(pre-compact)。亦及其所有邊界點均坐落在有限的距離之內. 因此前述的微分幾何緊緻化理論並不適用於此度量. 當然這個情形早有特別的處理方式. 而稍後筆者也將提供 M(g) 上另一個新的完備度量.

今考慮 X 爲 Calabi-Yau 流形。當 X 爲平滑環面或 hyperhahler，其模空間爲對稱空間。此時 G 爲完備並符合曲率條件。然而此緊緻化問題早爲 Mumford, Baily-Borel, Satake 等數學家們所徹底了解。因此我們只考慮 SU 型 Calabi-Yau。對此 Schumacher 曾簡化 Siu 的方法並得到 G 的黎曼曲率張量公式。然而要能一步研究 G 與 X 的演化及退化關係，還是要回歸到 G 與 VHS 的關聯。根據 X 上全純體積微分式 Ω，我們可得到 M 上一個線叢 F 及 hermitian 度量。其曲率正好是度量 G。筆者在 1996 利用這個刻劃給出了 G 的黎曼曲率張量一個僅用二階 Kodaira-Spencer map 就足以表達的公式以及極簡易的推導。配合 Schmid 的 nilpotent orbit 定理，這個做法也提供了分析曲率在邊界旁漸進行爲的方法。我們已知 Ricci 曲率有下界，但是並無上界且沒有固定的符號。

筆者在 1997 曾爲文探討 G 的完備性。結論是否定的。我們導出有限 G 距離的 Calabi-Yau 退化過程的一個 VHS 的充分必要條件，並證明所有退化至典型奇異點的過程均爲有限距離。對於三維 Calabi-Yau 流形退化至僅具細微奇異點時, 筆者利用 Mori 理論進一步證明，即使在雙有理意義下，退化現象也不消失。因此他們確爲本質上的不完備點。有鑑於此，筆者進一步提出 M 對於度量 G 的完備化猜想。雖然模空間的緊緻化勢必加入相當奇異的 stable varieties，完備化卻應等同於僅加入具有不壞於典型奇異點的 Calabi-Yau。最近筆者證明若假設 n + 1 維的極小模型存在，則上述之完備化猜想爲眞。倘若 Shokurov 的四維定理成立，我們就有三維 Calabi-Yau 模空間的一個幾何完備化。接下來的課題便在於如何從這一個完備空間去

研究整體模空間的幾何。

5. 模空間的 Hodge 度量，Quasi-Hodge 度量與完備性

模空間另一個自然度量 h 是從 period domain 上的不變度量透過 period map 誘導回來的 Hodge 度量。h 也可由 Hodge 向量叢上的自然度量誘導而來。Hodge 度量忠實地反映出 Hodge 結構的變分，如果我們主動加入 monodromy 爲 trivial 的退化 VHS，則 h 必然是完備的度量。關於 h 的曲率，其全純截面曲率爲負係 Griffiths 與 Schmid 於 60 年代末的古典結果。在 Calabi-Yau 時 Lu 於 1997 進一步證明 Ricci(h)與全純雙截面曲率亦爲負。前述的緊緻化定理就只缺高斯-黎曼截面曲率的有界性。關於此，筆者研究 G 的漸進方法可以應用於餘維爲 1 的模空間邊界上，但尚未能做到具高餘維的邊界點. Lu 最近也利用漸進方法得到三維及四維 Calabi-Yau 流形的一維模空間度量 h 的高斯曲率有界性。我們期待剩下的情況能於不久的將來得到解決。

Hodge 度量將所有奇異點一示同仁也未盡完美。三維 Calabi-Yau 時，筆者的曲率公式可推出 $h = (d + 3)G + \mathrm{Ricci}(G)$，並且 G 的不完備邊界點對應於 Ricci(G)趨於正無窮大的點. 換言之，G 與 Ricci(G)的無限性可以用來區分不同程度的退化。而退化至典型奇異點是最低程度的情況。在弦理論中，其中一種將十維理論降至(compactified to)四維時空的理論是奠基於某個複三維 Calabi-Yau 流形作爲其剩餘六維空間。由於相信物理理論的唯一性，許多數學家以及物理學家相信不同的三維 Calabi-Yau 流形間可以透過某些轉換(transition)而相連。使得物理定律可對其中一個 Calabi-Yau 作探討就足夠. 根據三維的代數幾何理論，這樣的轉換有 flop 與 extremal transition。後者係將一 Calabi-Yau 退化至典型奇異點後再進行 crepant resolution (保持全純體積下化解奇異點)。Strominger 曾爲文說明 extremal transition 與黑洞現象在弦理論中的關係。注意到度量 G 具物理意義 (因其來自 Einstein 度量的變分)，但度量 h 並無。我們的結論保證物理上所談的轉換發生於有限的時空點，而非無止盡的時空崩潰處。

同意應將典型奇異點與更壞的退化作區隔後，對於一般極小模型的模空間 M，我們便想找到一個自然的度量使其有限距離的邊界點恰對應於典型奇異點。筆者於 2002 提出 quasi-Hodge 度量，其造法係以全純線叢 mK 的全純截面(pluri-canonical forms)所形成的向量叢 F(m)爲出發點。雖然 F(m)本身並沒有自然的 hermitian 度量，但是可以證明 $F(m)\oplus F(m-1)\oplus\ldots\oplus F(1)$有，並且有非負曲率。我們便將度量 G(m) 定爲其曲率。筆者的猜想是，在雙有理意義之下，一個退化等價於「退化至典型奇異點」的充分必要條件爲：對所有 m 該退化皆爲 G(m)不完備點。不難看出我們儘需檢驗有限個 m 值就足夠了。對於曲線的模空間這個猜想已獲得了證明。由於曲線並無 non-trivial 的典型奇異點，這就證明了對夠大的 m (事實上 $m \geqq 4$ 就足夠了)，G(m)是一個完備度量。一般而言，筆者認爲 quasi-Hodge 度量是 Calabi-Yau 模空間的 Weil-Petersson 度量在極小模型模空間裡最恰當的推廣，並值得繼續深入探討。

參考文獻

[1] *Math. Res. Let.*, **4**, 157 (1997).

[2] Preprint Submitted to *Documenta Mathematica* (2000).

[3] *Math. Res. Let.*, **10**, 57 (2003).