Liouville 型方程最近的發展

台灣大學數學系 陳俊全

十九世紀時，J. Liouville 研究幾何問題而考慮如下的方程式

$\triangle \log f \pm f = 0,$

其中 f 是定義在二維區域上的函數。在文獻上，常令 $u = \log f$，則上述方程等價於

$$\triangle u \pm \exp(u) = 0 \qquad (1.1)$$

在 1853 年時，Liouville 找到了一個漂亮的方法，給出了這個方程式解的積分表示理論。從那時起，這個方程式和它的變形，或因相似的數學問題，或因其它方面的應用而不斷地被探討著。

近年來這類方程因爲新的興趣及動機，又成了十分熱絡的題材。主要的問題是考慮二維曲面或二維歐氏子區域 M 上的方程式

$$\triangle u + \rho \{h(x) \exp(u) / \int h(x) \exp(u)\, dx - 1\} = \Sigma 4\pi A_i (\delta_i - 1), \qquad (1.2)$$

其中爲了方便假設 M 的體積爲 1，$\int h(x) \exp(u)\, dx$ 是在 M 上的積分，h(x)是 M 上的函數，ρ 是實數，A_i (i=1，2，3 ....，N)是正整數或實數，而 δ_i (i=1，2，3 ....，N)是 Dirac 函數。探討這個方程式的幾個動機來自於

(1) Nirenberg 問題或 Kazdan-Warner 問題：

令 M 爲二維球。若將其上的 metric 做保角變換，則 Gauss 曲率也將隨著改變。若反過來先指定一個函數，Nirenberg 問題問的是有沒有可能找到一個 metric 的保角變換，使新的 Gauss 曲率恰爲該指定的函數。這個問題等價於在 $A_i=0$，i=1，2，3 ....，N 及 $\rho=8\pi$ 的情形下，解方程(1.2)，而函數 h(x)則相當於 Gauss 曲率。若考慮更一般的曲面，或維度更高時，這個問題也稱作 Kazdan-Warner 問題。近十多年來，有相當多這方面的文獻，請參考 Kazdan and Warner [11], Chang and Yang [6], Chang, Gursky and Yang [5]等。

(2) Vortex 理論：

當 Euler 流體中有許多 vortex 時，問題將變得很複雜。若用統計力學的方法，隨著 vortex 數目的增加取 mean field limit，則會得到方程(1.2)，其中 $A_i=0$，i=1，2，3 ....，N，u 代表 vortex 的密度，ρ 則是和溫度相關之參數。另外，在 Onsager 的 vortex 理論中，也可以得到這類方程式。請參考 Caglioti, Lions, Marchioro and Pulvirenti [2,3], Kiessling[12], Chanillo and Kiessling [4]。

(3) Chern-Simons-Higgs 模型：

在一些 self-dual 的 Chern-Simons-Higgs model 中，可以得到 nonlinear 項不同於(1.2)的方程式。若令適當的參數趨近極限的情況，則該方程式會收斂至方程(1.2)。雖然其間的數學論證及關連並未完全釐清，方程(1.2) 的研究，應會對現象的了解大有助益。相關請參考 Hong-Kim-Pac [9], Jackiw-Weinberg [10], Nolasco-Tarantello [13,14], Tarantello[17]。在電弱理論及許多場論相關的現象中，(1.2)或類似的聯立方程，也扮演重要角色，請參考 Ricciardi- Tarantello [15], Bartolucci- Tarantello [1], Yang [18]。

(4) 生物中 chemotaxis 模型：

1970 年 Keller 及 Segel 提出了一個模型來描述 slime mold（黏菌）移動聚集的行爲。該模型的平衡態，正好滿足 $A_i=0$ 時的方程式(1.2)。請參考 Suzuki[16]。

方程式(1.2)中的 $\Sigma 4\pi A_i (\delta_i - 1)$一項，可透過將解加上適當 Green 函數來消除。不過如此一來，h(x)這一項將發生改變，在原有 Dirac 函數的地方取値爲零，這在數學上會變得很難處理。因此，處理 Dirac 函數的困難只是換成處理 h(x)取値爲零的困難，並沒有佔什麼便宜。

我們先來看 $A_i=0$ 及 $h(x)>0$ 的情況 (h(x) 完全<0 是較容易處理的情況)。方程式(1.2)可以寫成變分的形式

$$J(u)=1/2 \int \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \rho \log\{ \int h(x)\exp(u) \, dx\} \quad (1.3)$$

J(u) 的臨界點對應了方程式的解。在方程式中，非線性項的總積分恰爲 ρ，我們可以把它想成是 u 對應的"總質量"或"總能量"。當 $\rho<8\pi$ 時，由 Moser-Trudinger 不等式可以証明 J(u) 有極小値點存在，(1.2)也因而有解。當 $\rho>8\pi$，J(u) 甚至連下界也沒有，因此尋找極小值是不合理的。

另一方面，Brezis-Merle, Li, Shafrir 等人的研究顯示，當 ρ 逼近 8π 的正整數倍，例如說 $8\pi m$ 時，方程式解的值可能在 m 個點附近趨向無窮大。這類現象稱爲 bubbling 或 blowing up。我們可以說當 $\rho<8\pi$ 時，沒有 bubbling 發生，數學上較容易研究。ρ 超過 8π 時，開始有一個 bubble 可能產生，問題因而變得困難。$\rho=8\pi$ 時，有 Chang, Yang 及 Gursky 等人經典的工作，得到全部解的拓樸 degree 和 h(x)的關係。$8\pi<\rho<16\pi$ 時，Ding, Jost, Li, Wang, 及 Tarantello, Struwe 等人用 mini-max 的變分方法証明解的存在性。$16\pi<\rho<24\pi$ 時，中正大學林長壽教授求出 M 爲球時，解的拓樸 degree 爲零。隨著 ρ 的增加，問題的複雜度似乎增加得非常快。

林長壽教授和作者近年來進一步分析 bubbling 發生的各項細節，並找到一種能計算各種 ρ 值之下解的拓樸 degree 方法。令 M 的 Euler characteristic 爲 $\chi(M)=2-2g$，其中 g 爲 M 的 genus。我們的主要結果如下，請見 [7,8]。

定理 1 設 $8\pi m<\rho<8\pi(m+1)$，則解的拓樸 degree 滿足

拓樸 degree = $(m-\chi(M))!/[m!(-\chi(M))!]$

定理 2 設 g>0。若 $\rho\neq 8\pi m$，則方程(1.2)一定有一解。

若 M 爲二維歐氏空間的子區域，則 g 代表其內有幾個洞。若 M 爲球，則 g=0，若爲輪胎面(torus)，則 g=1，若相當於兩個輪胎面接成的曲面，則 g=2，依此類推。拓樸 degree 的意義則在於替解編上+1 或-1 的值，並求其和。因此若拓樸 degree 不爲 0，則必有一解。其絕對值越大，也表示一般而言，方程的解越多。從定理 1 中，可看出 ρ 或 g 越大，degree 就越大。

當 $A_i\neq 0$ 時，方程式(1.2)的研究又更加困難。目前，我們對相應的 bubbling 行爲已有足夠精細的了解。對解拓樸 degree 的全面計算看起來非常有成功的希望。

由於 bubbling 的發生，會造成數學技術上的困難。因此早先研究這類方程時，總是在找能「抑制」bubbling 發生的條件。不過在我們的研究中，對 bubbling 現象的刻劃已相當精確。在沒有其它方法可用的情況下，這些 bubble 反而可被拿來當作研究方程的功具，計算解的拓樸 degree。有時一開始看起來是「不好」的現象，最後反而可能是最有用的。這種事情在學術研究上應該是屢見不鮮的吧。

參考資料

[1] D. Bartolucci and G. Tarantello, *Comm. Math. Phys*, **229**, 3 (2002).

[2] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro and M. Pulvirenti, A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description, *Comm. Math. Phys*., **143**, 501 (1992).

[3] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro and M. Pulvirenti, *Comm. Math. Phys*., **174**, 229 (1995).

[4] S. Chanillo and M. Kiessling, *Comm. Math. Phys*., **160**, 217 (1994).

[5] S. Y. Chang, M. Gursky and P. Yang, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **1**, 205 (1993).

[6] S. Y. Chang and P. Yang, *Duke Math. J*., **64**, 27 (1991).

[7] C.-C. Chen and C.-S. Lin, *Comm. Pure Appl. Math*., **56**, 728 (2002).

[8] C.-C. Chen and C.-S. Lin, to appear in *Comm. Pure Appl. Math*.

[9] J. Hong, Y. Kim and P.Y. Pac, *Phys. Rev. Lett*., 64, 2230 (1990).

[10] R. Jackiw and E.J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett*., **64**, 2234 (1990).

[11] J. Kazdan and F. Warner, *Ann. of Math*., **99**,

14 (1974).

[12] M.H.K. Kiessling, *Comm. Pure Appl. Math.*, **46**, 27 (1993).

[13] M. Nolasco and G. Tarantello, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **9**, 31 (1999).

[14] M. Nolasco and G. Tarantello, *Comm. Math. Phys.*, **213**, 599 (2000).

[15] T. Riciardi and G. Tarantello, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**, 811 (2000).

[16] T. Suzuki, *Comm. Contemporary Math.*, **2**, 373 (2000).

[17] G. Tarantello, J. Math. Phys., **37**, 3769 (1996).

[18] Y. Yang, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag (2000).