[研究成果報導]

非交換幾何與弦論

台灣大學物理系　賀培銘

一、非交換幾何與量子力學

非交換幾何(noncommutative geometry)是古典幾何的一種推廣。量子力學出現之後，物理學家很自然的開始懷疑，既然時空的座標在量子力學中是作用於希爾伯特空間(Hilbert space)上的算符(operator)，它們的交換關係(commutator)可以不爲零。一種簡單的可能是 X 之間的 commutator 只與 X 有關：

$$[X_\mu, X_\nu] = i\,\theta_{\mu\nu}(X)\text{，} \tag{1}$$

其中 θ 是一個張量(tensor)，它必須滿足 Jacobi identity：

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda] + [[X_\nu, X_\lambda], X_\mu] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] = 0\text{。} \tag{2}$$

Jacobi identity 是結合律(associativity)的條件。結合律的意思是，三個 X 的函數 a，b，c 互乘時，只要順序固定，先做哪兩者的乘積不會影響結果；亦即：a(bc) = (ab)c。量子力學中的算符的乘法，應該要滿足結合律的條件，否則量子力學就要被大大地修改了，因此我們通常會要求 Jacobi identity 成立。

據說最早寫下量子力學非交換關係的 Heisenberg 也曾嘗試要找一個非交換的時空座標乘法關係，並要求滿足龐加萊對稱(Poincare symmetry，亦即羅倫茲對稱性(Lorentz symmetry)加上時空平移不變性(translational symmetry))。後來，包括楊振寧等[1]許多人都對這個問題提出不同的答案。通常，如果要滿足古典的龐加萊對稱，非交換的關係會需要將時空座標和能量動量混在一起。公式(1)中假設$\theta_{\mu\nu}$與動量無關，因此若非$\theta_{\mu\nu}$爲零，龐加萊對稱並不成立。若$\theta_{\mu\nu}$爲不爲零的常數，則羅倫茲對稱被破壞但平移不變性仍成立。通常我們想像$\theta_{\mu\nu}$爲一背景場，所以只要它在羅倫茲轉換下正常地根據它的足標變換，公式(1)並不意味著羅倫茲對稱在基本物理定律中被破壞，它只是被背景場破壞了。

在量子力學中，相空間(phase space)的座標包含空間座標及動量座標，它們的交換關係是一起由物理系統的 Lagrangian 決定的。非相對論性(non-relativistic) 點粒子 (point particle) 的 Lagrangian 的標準形式是

$$L = m\mathbf{V}^2/2 - U(X)\text{，} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{V}$ 是速度，U(X)是位能。這樣的 Lagrangian 所決定的交換關係是大家所熟知的：

$$[X_i, X_j] = 0\text{，}[X_i, P_j] = i\,\delta_{ij}\text{，}[P_i, P_j] = 0\text{。} \tag{4}$$

(P = m$\mathbf{V}$ 爲動量。)上述空間座標之間的非交換關係(1)，也有可能是特定的 Lagrangian 所決定的形式。最簡單的例子，是二維空間中的電子在固定強磁場下的情形。此系統之 Lagrangian 爲

$$L = m\mathbf{V}^2/2 + A_x \mathbf{V}_x + A_y \mathbf{V}_y - U(X)\text{，} \tag{5}$$

而其中 A 是背景電磁場的向量位勢(vector potential)。Z 方向之磁場強度爲常數 B 時，可以選

$$A_x = -By/2\text{，}A_x = Bx/2\text{。} \tag{6}$$

磁場很大時，若相對而言電子的速度不大，可以忽略 L 中的第一項動能項，這時量子力學告訴我們：

$$[x, y] = i/B\text{。} \tag{7}$$

但如果我們不忽略動能項，則量子化的結果仍然和以前(4)一樣。這是因爲，忽略動量項時所做的近似，相當於把電子的位置以其圓周運動(cyclotron motion)的中心位置取代。因爲 cyclotron motion 的中心位置與電子實際位置的差別與動量有關，所以雖然實際位置的座標是可交換的，但中心位置座標卻是不可交換的。雖然

(7)是一個粗略的近似，但可以用來方便地描述此系統之 lowest Landau level。

總之，量子力學中時空座標的代數關係是由標準的量子化程序所決定的，而一般常見的情形中它們的乘法是可交換的。但是非交換時空也可以藉由修正交互作用的方式描述。例如，薛丁格方程式

$$i\partial_t \psi = -(\partial_x^2 + \partial_y^2)\psi/2m + V(x,y)\,\psi \tag{8}$$

可以被修正爲

$$i\partial_t \psi = -\partial_x^2 \psi/2m + V(x,y)*\psi 。\tag{9}$$

這裡唯一的修正是改變了位能 V 與波函數的乘積的定義，符號”*”的意義將會在下一節說明。

二、非交換幾何與場論

一般的場論中的場(field)是定義在古典空間上的。例如標量場$\phi(x)$是時空座標 x 的函數，而 x 滿足可交換的一般乘法關係。若將 x 的乘法用非交換的關係定義，仍然可以繼續定義$\phi(x)$的場論，概念上並沒有什麼不同。事實上，場論中的時空座標只是一種 dummy variable，並不對應到可測量的物理量。反過來想，平常只用可交換的代數去定義 x 的乘法，應該算是一種假設；就像廣義相對論出現之前，大家總是理所當然地認爲時空是平的，但是現在我們知道那是一個近似或假設。雖然現在還沒有任何實驗證據支持非交換幾何，但是因爲它並不必然違反主要的物理定律，例如能量守恆，光速的不變性等，而且有相當大的彈性，非交換時空上的場論(簡稱非交換場論)是較受歡迎的理論架構之一，經常被用來建構新的理論[2]。另一方面，包含時間座標的非交換關係，一般人的感覺是會擔心有么正性(unitarity)及因果律(causality)的問題，所以較保守的做法是只考慮空間座標的非交換關係，而讓時間座標與所有其他座標滿足可交換的乘法關係。

利用 Moyal 乘法，非交換量子場論可以理解成可交換時空上的量子場論，唯一的差別是 Lagrangian 中的交互作用項會包含高次微分的算符。Moyal 乘法是量子力學發展過程中發現的一種表示非交換乘法的方法。若希望描述滿足

$$[X, Y] = i \tag{10}$$

的非交換空間中函數的乘法，則定義可交換(x, y)空間上的新乘法爲：

$$(f * g)(x,y) = [\exp\{i(\partial_x \partial_{y'} - \partial_y \partial_{x'})/2\} \; f(x,y)\, g(x',y')]|_{x'=x;\, y'=y} 。\tag{11}$$

如此一來，$x*y - y*x = i$ (選 $f(x,y) = x$、$g(x,y) = y$ 的情形)，便實現了原來的非交換關係。原來的非交換乘法中的元素，也就是 X、Y 的函數，需要特別指定 X、Y 的順序，例如 XY 與 YX 是不同的函數。但在 Moyal 乘法的表示方式中，代數元素 xy 與 yx 是完全一樣的；只有用*表示的 Moyal 乘法才不可交換。

非交換場論的 Lagrangian 若是

$$L = (\partial\phi)^2/2 + \lambda\phi^3 , \tag{12}$$

而其中ϕ是非交換空間(X,Y)的函數，則等價的一個描述是

$$L = (\partial\phi)*(\partial\phi)/2 + \lambda\phi*\phi*\phi , \tag{13}$$

其中ϕ現在則是定義爲可交換空間(x,y)的函數。

(13)式第一項的*符號其實可以略去，因爲眞正定義物理系統的是 Action，而我們可以用部分積分證明（若函數在無限遠處趨近於零）：

$$\iint dx\, dy\, f(x,y)*g(x,y) = \iint dx\, dy\, f(x,y)g(x,y) 。\tag{14}$$

藉由變數變換，若 X、Y 之間的非交換關係(10)與不同，我們也可以找到對應的 Moyal 乘法表示法。

因爲量子力學可以看成量子場論的低能量近似描述，若先假設非交換量子場論是對的，量子力學中的非交換性質便不是任意的，而自動會有一些有趣的關係。例如粒子與反粒子所感到的非交換幾何(1)中的右邊會差一負號[3]。

三、非交換幾何與弦論

在弦論中，非交換幾何自然地出現了，而且是以極簡單的形式出現。我們先從兩方面來談爲什麼非交換幾何在弦論中出現不該是太令人意外的事。首先，弦論是一個包含量子引力的理論，而量子引力就是時空結構的量子效應。根據量子力學，時空位置的不確定性越小時，能量動量的不確定性越大；而根據廣義相對論，能量動量越大時，時空彎曲的程度越大。結論是時空的不確定性不能小於普朗克(Planck)尺度。這告訴我們：時空在極微觀尺度的描述不該是古典的幾

何，因為”點”的概念應該已不適用。而非交換幾何似乎是造成時空座標測不準原理(uncertainty principle)的簡單方法，因此弦論中包含非交換幾何似乎是自然的。另一個類似的原因，是”弦”本身就是在時空中延伸的物體(一條線)。弦論中所有的東西都由弦來定義，甚至包括時空的性質。既然時空的性質不是由點狀物體定義，時空的幾何也不該是用”點”來定義的古典幾何。

我們可以用一個簡單的模型[4]來說明上述的想法。將一根彈簧兩端分別綁上相反的電荷，當這個像一條弦的系統在磁場中運動時，兩電荷受到相反方向的羅倫茲力的作用，將彈簧拉開至某一長度。彈簧伸長的方向和運動方向垂直，而彈簧的長度和運動速度成正比。若將運動的方向叫做 X，彈簧伸長的方向叫做 Y，則量子力學的測不準原理讓 X 的不確定程度ΔX 與彈簧的運動速度成反比，因此ΔX 也與彈簧的長度ΔY 成反比。所以ΔX、ΔY 滿足這樣的測不準關係：

$$\Delta X \, \Delta Y > C, \qquad (14)$$

其中 C 是一由系統質量、電荷大小及背景磁場大小決定的常數。這個測不準關係和非交換幾何所導致的測不準關係是同類的。以上的討論中，我們把彈簧的長度稱作ΔY，把它視為空間在 Y 方向上測量的不確定程度，這是因為弦論中時空的性質是藉由弦來測量、定義的。在巨觀的世界中我們可以藉由其他較小的物體探知時空的性質，所以不會把彈簧的長度視為空間中 Y 座標的不確定程度

上述的簡單模型大略地反映了弦論中的一種情形，亦即 Dirichlet brane(簡稱 D-brane)的情形。兩端有電荷的彈簧對應到兩端在 D-brane 上滑行的開弦(open string，一個線段)，而電磁場對應於 D-brane 上的一個規範場，其背景值決定了非交換的程度。如果將這個開弦的系統拿來，經由標準的量子力學處理，就會發現[5]弦的兩端點座標滿足非交換關係(1)。弦論中也有其他的情形表現出類似非交換幾何的性質，例如某些特殊背景場下的閉弦(closed string，一個圈)[6]。

四、討論與結論

之前曾提到，公式(1)必須滿足 Jacobi identity，時空座標的代數關係才會滿足結合律，而在 D-brane 的情形中，(1)的右邊是由某一背景場所決定。如果背景場的值是常數，Jacobi identity 顯然會被滿足。但是若背景場的值不是常數呢？這時是否必須考慮”非結合(non-associative)幾何”？如果我們根據給定的背景場，重新作一次開弦的量子化，則結果應該還是滿足結合律的，因為這是標準的量子化程序所保證的[7,8]，唯一的差別是這時時空座標和能量動量的乘法可能是混在一起的(時空座標的 commutator 是能量動量的函數)。另一方面，因為場論中的時空座標只是 dummy variable，所以只要使用方便，我們並不一定要用標準的量子化程序去決定時空座標的非交換關係(例如可以根據 correlation function 的形式去定義適合的代數[9])，如果願意，我們仍然可以堅持使用非結合幾何[10]。不過，因為非結合代數一般而言比滿足結合律的代數複雜很多，而且似乎很難在非結合幾何上定義規範轉換(gauge transformation)，所以非結合代數在物理中的使用仍非常少見，而且似乎沒有實際的好處。另一方面，如果時空的代數關係和能量動量混在一起，規範對稱還是可以被定義[8]。

與非交換幾何有關的物理問題很多，除了可以將所有過去的物理問題拿來重新在非交換時空上考慮外，或許還有更重要的物理應用尚未被發現。目前有關的研究，不論是弦論或現象學的題目，似乎多是現象上的描述，而較少觸及可能的更基本的意義，例如它和量子重力中的全像原理(holography)的可能關係；甚或是它與量子力學的基礎的關係。對弦論或場論中非交換幾何的應用有興趣的讀者可以參考[11]；對非交換幾何的數學有興趣的人可以參考[12]。

參考資料

[1] H. S. Snyder, *Phys. Rev.,* **71**, 38 (1946); C. N. Yang, *Phys. Rev.,* **72**, 68 (1947).

[2] S. Baek, D. K. Ghosh, X. G. He, W. Y. P. Hwang, *Phys. Rev. D*, **64**, 056001 (2001) N. G. Deshpande, X. G. He, *Phys. Lett. B*, **533**, 116 (2002); X. G. He, *Eur. Phys. J. C*, **28**, 557 (2003).

[3] P. M. Ho, H. C. Kao, *Noncommutative quantum mechanics from noncommutative*

quantum field theory, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 151602 (2002).

[4] D. Bigatti, L. Susskind, *Magnetic fields, branes and noncommutative geometry*, *Phys. Rev. D*, **62**, 066004 (2000); Yin, *A note on space noncommutativity*, *Phys. Lett. B*, **466**, 234 (1999).

[5] C. S. Chu and P. M. Ho, *Nucl. Phys. B*, **550**, 151 (1999); C. S. Chu and P. M. Ho, *Nucl. Phys. B*, **568**, 447 (2000).

[6] P. M. Ho and M. Li, *Nucl. Phys. B*, **596**, 259 (2001); P. M. Ho and M. Li, *Nucl. Phys. B*, **590**, 198 (2000).

[7] P. M. Ho and Y. T. Yeh, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 5523 (2000).

[8] P. M. Ho, *Making nonassociative algebra associative*, *JHEP*, 0111, 026 (2001).

[9] V. Schomerus, *D-branes and deformation quantization*, *JHEP*, 9906, 030 (1999).

[10] L. Cornalba and R. Schiappa, *Comm. Math. Phys.*, **225**, 33 (2002).

[11] N. Seiberg and E. Witten, *JHEP,* **032**, (1999); M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 977 (2001).

[12] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).