

微波背景輻射之偏極及其量測

台灣大學物理系 關志鴻

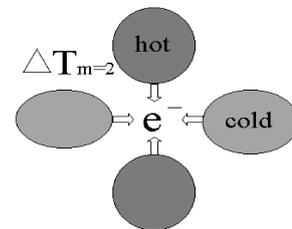
本文旨在簡介微波背景輻射偏極的物理機制、宇宙學中的重要性、以及如何做有效的量測。前者由最近十年的有關文獻中整理而得[1]，後者為筆者和學生最近二、三年的工作[2,3]。

一般而言，光在光源裏經過多次碰撞而趨於平衡後，並無偏極現象。因此光的偏極通常只在非平衡的狀況下產生。常見的非平衡態下產生的偏極光有鏡子反射的光、晴天時天空的藍光、月光等。它們的共通性為均是一次反射或散射的光。陰天中，雲發出的光並無偏極，就是因為陽光在雲裡面多次散射後才溢出的。以此準則得知，單次散射或反射為光偏極的條件。這些偏極光的另一共通性為：它們均是線性偏極。

宇宙大爆炸的理論模型中，早期宇宙是高溫的，且大部分的能量形式以光子的狀態存在。帶電粒子雖佔能量的少數，但它們的存在可讓光子散射，也因此讓光子一直維持在熱平衡狀態。隨著宇宙膨脹、溫度下降，大約在宇宙溫度為 3000 度左右，或宇宙地平視界為目前視界的三萬分之一時，這些游離的帶電粒子相互結合為中性的氫原子及氦原子。此溫度下的光子為可見光，它們和中性氫及氦原子無法散射，也因此光子驟然處於非平衡態中。我們可以想像這情況就像在一個密閉的球型房間裡，並且房間的上下四方為均勻發光的螢光幕。光源在螢光幕上，因此房間的任意一點的光均勻的來自上下四方，且這些光處於非平衡態。這個比喻可往下延伸，膨脹的宇宙就像往外擴張的房間，房裡的光能量下降因為光源的都卜勒效應。

但是，以上的理想模型不足以產生房裡的偏極光。我們需要散射或反射。考慮在房間裡放一個散射點。此時雖有散射光，但它並無偏極。因為散射的入射光為各向均勻，反射光便無法產生具方向性的現象，也因此沒有極化。產生極化光的條件其實比光散射還強。它和光源有密切的關係。入射光需非均勻，並具四極性。亦即入射光強度上+下-左-右不等於零。圖一的入射光產生水平極化朝向讀者的散射光。

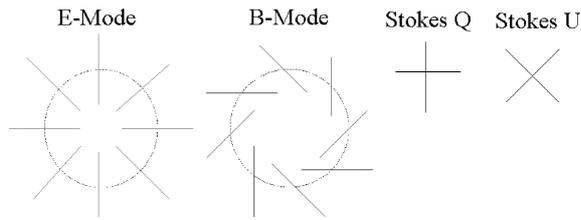
在宇宙中如何得到具四極光源呢？其實在上述例子中，只要螢光幕上的光源強度有一些明暗



圖一 四極的湯姆森散射可產生朝向讀者方向散射之光子的極光

對比，房內任一點的入射光通常具有四極性。也因此房內光的偏極程度和四壁螢幕的明暗對比度呈比例關係。回到宇宙學模型，房內的光就是宇宙背景輻射，螢幕的明暗對比便是背景輻射的非均向微擾的源頭。上面的闡述說明宇宙背景輻射的偏極和微擾大致為一體的兩面。它們具相關性，並且表現類似的物理源頭。但它們在細節上可提供不一樣的訊息。譬如，偏極光的散射點在時間上只存在於宇宙溫度為 3000 度左右，在空間上只存在於螢幕表面，因此它提供了宇宙在那一瞬間一個二維球殼裡的訊息。反之，背景輻射微擾的光，或螢幕上發出的光，需穿過半個宇宙的距離才到達觀測者；其中經歷一些足以改變它強度的機制。影響最嚴重的是重力井現象。若光源和觀測者位於不同的重力井高度，光的強度是會改變的。也因此背景輻射微擾亦具有光程中累積出來的效應。

一般而言，背景輻射的偏極幅度為微擾的十分之一左右，也因此偵測上儀器的靈敏度需要十倍以上。另外，有趣的是，雖然光偏極的圖樣是紊亂的分佈，但它是由一些基本的圖樣架構出來的。圖二的 E-mode 即為基本結構。偏極為一個二維的二階張量，主軸偏極(Stokes Q)為水平偏極(正號)或垂直偏極(負號)，而副軸偏極(Stokes U)呈 45 度偏極。基本結構的 E-mode 為沿著一個圓圈，偏極方向永遠朝徑向(正號)或朝圓周方向(負號)。舉例而言，置太陽於圓中心，圓周上的偏極即為負號的 E-mode。背景輻射的偏極可視為由強弱不同並位置任意的多個光源所散射出來的。因此它的整體圖像便是由多個半徑不一，中心錯置的基本結構 E-mode 所合成的。



圖二 光子極化的空間分佈可分解為E和B兩種正交張量模。它們可由Q極化和U極化量得

其實上述半徑不一的E-mode並不精準。這些E-mode是有偏好的半徑，為散射的mean-free-path；它大概是當時宇宙視界的1/4。以目前的宇宙觀之大概為20角分左右[2]。

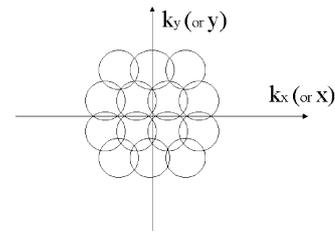
以上為背景輻射偏極產生的正常管道。下面介紹另一個管道。雖然正常管道的背景輻射偏極為未來數年宇宙學背景輻射實驗的目標，但如筆者前述，它提供的訊息並沒超過背景輻射微擾所提供的，也因此在科學上並無太大的開創性及突破的機會。反之，背景輻射偏極的另一個管道是由重力波所造成的。它是一個新的訊息，反映了暴漲期間原始重力波的激發。它直接提供暴漲的能量尺度和普朗克能量尺度的比值。

重力波的效應為破壞空間的均向性。光子在這樣的空間行進就像在一個非等向的介質行進。不同的是，後者影響不同方向電場的行進速度，但前者影響不同方向電場的能量密度。這個機制無需光子的散射，只牽涉到行進中與光子大致同方向的重力波。這些重力波也以光速前進，因此和光子的作用時間長，作用的效應也大。所以這個管道產生的背景輻射偏極直接顯示原始重力波的波形及強度。若以大統合理論的能量尺度來估計暴漲的能量，這個管道的偏極的強度又為正常管道偏極的十分之一。

如此小的偏極勢必讓正常管道的偏極所混合並掩蓋過。即使我們擁有最敏感的儀器，如何分辨這兩個管道產生的偏極才是問題所在。幸運的是，重力波產生的光偏極包含E-mode及B-mode（圖二所示）。B-mode常見於光照於崎嶇不平的反射面，為非線性效應。但在宇宙學的架構下，偏極機制都是線性的，也因此由光源的四極散射無法產生B-mode。但是若光子和向量場的雙極及張量場的單極作用，便能產生B-mode。

下面的偏極張量數學式[2]，提供E-mode和B-mode的表示式，也回應上面所述。

$$\underline{\underline{P}} = [\nabla\nabla - (\hat{z}\times\nabla)(\hat{z}\times\nabla)]f + [(\hat{z}\times\nabla)\nabla + \nabla(\hat{z}\times\nabla)]g$$



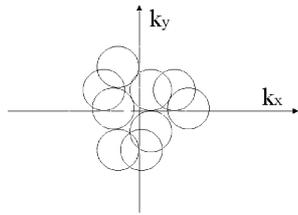
圖三 空間或傅利葉空間中有限大小的像元可造成E模和B模互相混淆

這是一個二維二階張量的通式，第一項為E-mode，第二項為B-mode。f為純量，而g為類純量。散射偏極正比於光源明暗度的四極，而明暗度為純量，也因此散射偏極只由E-mode貢獻，正比於f光源明暗度。非純量產生的偏極皆可由類純量及純量的四極概括。因此，B-mode為向量場及張量場所貢獻。在宇宙學中，向量場可為宇宙弦及其衍生之結構。由於宇宙弦並不在宇宙學的標準模型中，本文暫不探討這個主題。在標準模型中，原始重力波的激發無可避免，因此暫且令B-mode為原始重力波的表徵。

下面進一步探討如何分別量測B-mode及E-mode。如同散射偏極，重力波產生的偏極B-mode亦是由半徑大小不一的錯置B-mode所合成。圖二已暗示量測E-mode及B-mode的基本概念—沿著圓周只量徑向或圓周方向的偏極，並將每一點的偏極加起來，我們可得此一圓周的E-mode。其它圓與此圓相交所貢獻的偏極將平均為零，沒有貢獻。同理，沿著圓周量測45度夾角的偏極，並加起來，可得此圓周的B-mode。

上述的量測方法乍看複雜，因為需要於不同位置量取不同Stokes Q和U的分量。然而，只要儀器設計得當，量測的方法相當簡單。其實Stokes Q和U和偏極量測的十字天線有絕對的關係。當十字天線置於x及y方向，量測到的 $E_x^2 - E_y^2$ 即為Stokes Q，而 $2E_x E_y$ 為Stokes U。因此如圖三所示，只要將十字天線的擺向隨著圓周位置不同而旋轉，我們可有非常方便的量測。例如，置十字天線的一個軸於徑向方向，另一軸在圓周方向，則在這個旋轉位標中，Stokes Q即為E-mode，而Stokes U為B-mode。

可惜的是，一般望遠鏡只有時角及仰角兩個自由度，無法做這個操作。目前的背景輻射實驗唯有台灣的Array for Microwave Background Anisotropy (AMiBA)擁有第三個自由度—自轉，也因此只有AMiBA可做這個方便的操作。



圖四 利用傅利葉空間中正三角像元取得的極化值，再加以適當的組合可抽取純粹的 E 模和 B 模

上述量測雖方便，但它為實像量測而非干涉陣列的量測。實像量測的不準度遠大於干涉陣列量測。不準度的來源為背景光。在這個量測中，90%以上的背景光來自於接收器的熱光。傳統上，由快速地切換天上標的及人造標準光源，可將儀器的背景光去除。但若放大器的增益亦快速飄移，此方法的效益即為有限。反之在干涉量測中，兩個接收器的熱光並無相關性，因此經過相乘器處理後平均為零，並不會污染干涉訊號。

但是傳統的干涉陣列量測亦有它的缺點。觀測影像在傅利葉域的波數正比於兩個接收器的距離。在傅利葉域中，E-mode 可表示為 $Q_k \cos 2\theta_k - U_k \sin 2\theta_k$ ，B-mode 為 $Q_k \sin 2\theta_k + U_k \cos 2\theta_k$ ，其中 θ_k 為波數向量 k 和天線 x -軸的夾角。若傅利葉域的解析度可無窮高，E-mode 和 B-mode 可由干涉陣列分別測量出來。但事與願違，接收器的鏡面並非無窮小，因此任兩個接收器的有效距離並非單一值。更可惜的是，為了增加干涉效率，我們通常需將鏡面緊鄰地放在一起。也因此傅利葉空間的解析度相當差，而 E-mode 和 B-mode 混成一體。如圖三所示，每個圈圈為傅利葉空間中可解析的最小尺度。譬如，最近原點的圈與 x 軸的夾角 θ_k 便有相當大的範圍需累加，也因此無法由上式得到純粹的 E-mode 和 B-mode。這個偏極混淆的問題對 E-mode 而言並不嚴重，但對 B-mode 卻非常嚴重，因為 B-mode 的強度僅為 E-mode 的十分之一。類似的偏極混淆問題亦存在於低空間解析像元的量測。

在圖二的圖像下，我們進一步利用六邊形在二維平面的特殊對稱發展出一個新的干涉陣列量測方法，可分別得到 E-mode 與 B-mode [3]。與實像量測一樣，量測的中心沿著圓周移動，十字天線也跟著轉動。但是接收器的位置需有正三角對稱，亦即將接收器放置於正三角形的頂點。並且三角形的方向亦有一定的要求。只有兩種正

三角形滿足我們的要求，一為三角形其中一邊朝著徑向，另一為其中一邊垂直徑向。前者為旋轉座標的 x 方向，後者為 y 方向。若將所有的接收器均置於一平台上，平台的指向沿著圓周公轉，並且平台亦具自轉，其轉速與公轉相同，則可滿足上述條件。每個三角形一組，每組的三個接收器量得的干涉訊息需作適當的線性組合。由此我們可分別得到 E-mode 及 B-mode。由於三角型方向的特殊安排，每組三角形的三個傅利葉波數亦具特殊的三角對稱（如圖四同顏色的三個圈所示）。這個三角對稱容許我們抽取不同幾何特性的標的物，亦即 E-mode 及 B-mode，即使在傅利葉域的解析度非常差的情況下亦可行[3]。

AMiBA 的設計符合上述條件。所有接收器至於平台上，平台可公轉亦可自轉，並且所有接收器位於正三角形的頂點。但是對 B-mode 的量測，AMiBA 亦有不利之處。第一，它的靈敏度不夠；第二，它的鏡子尺寸太大。後者起因於原始重力波的波包大，視角亦大，約為 3 度以上。重力波與光子的作用一直持續到現在，也因此較靠近觀測者，具大視角。理想的 B-mode 觀測在 AMiBA 波段(100GHz)是一個手提箱式的實驗，廣角接收器的鏡面只為 8 公分，短小輕薄。舉例而言，在 50 公分的箱子裡可置 36 個接收器，其收訊 B-mode 的能力可比 AMiBA 好四倍。這是個有好利基的實驗，可參考 AMiBA 的後續實驗。

雖然未來幾年的背景偏極輻射實驗將著力於 E-mode 的量測，但是 B-mode 的量測才是這領域未來競爭的著力點。以目前世界各組實驗實力的估計，五、六年後才可能進行有效的 B-mode 量測。在這期間內，宇宙學實驗將朝兩個不同的方向。一為探測早期宇宙(紅移為 2 至 3 左右)的超新星爆發，藉以了解宇宙的狀態方程。另一為探測早期宇宙(紅移為 1 至 2)的大結構演化，藉此直接鎖定原始宇宙微擾的強度。後者將是一部份新的背景輻射實驗的目標，利用背景輻射的反康普吞效應(Sunyaev-Zeldovich Effect)來探索早期宇宙中存於深重力井的高熱電子的所在。預期 AMiBA 將以此為主要的科學目標。

參考資料

- [1] A.H. Jaffe, M. Kamionkowski and L. Wang, *Phys. Rev. D*, **61**, 3501 (2000).
- [2] T. Chiueh and C.J. Ma, *APJ*, **578**, 12 (2002).
- [3] C.J. Ma, and T. Chiueh, *Mod. Phys. Let. A*, **19**, 1031 (2004).