複流形上的常曲率方程

成功大學數學系 洪英志

一、早期背景

在複流形(complex manifold)上找出具有特殊意義的Kaehler metrics一直是微分幾何中的重要問題之一。在黎曼曲面(Riemann surface)上找出具有常曲率的 Kaehler metrics 是一定可以做到，而這也是偏微分方程理論發展的重要源頭之一。由於我們可以在任何可賦向(orientable)曲面上指定整複結構(integrable complex structure)，在可賦向曲面上解常曲率方程也成爲可賦向曲面的分類方法之一。這方面的研討(在可賦向曲面的情況)自 Riemann 開始直到 1950 年代差不多已經相當完整。

到了 1950 年代之後，由於代數幾何與複流形的蓬勃發展，E. Calabi[C]在 1950-1960 提出以下的問題：假設一個複流形的 canonical class 與 Kaehler class 在同一條線上，是否可以在這個 Kaehler class 中解出帶有 constant Ricci curvature 的 Kaehler metrics。Calabi 猜測這個問題的答案是肯定的。這樣的猜測後來被稱爲 Calabi Conjecture。

由於這樣的偏微分方程(Monge-Ampere equation)是很嚴重地非線性，這個問題懸而未決數十年。直到 S.-T. Yau(丘成桐)[Y]才在 1977-1978 解決了當複流形的 anti-canonical class 是≤0 的情況。(這其中包含了 Aubin、Nirenberg 以及 Calabi 本人的努力。)

二、偏微分方程角度的不足

表面上來看解 Monge-Ampere equation 似乎是一個單純的偏微分方程問題。但是其實所牽涉到的幾何角度在 anti-canonical class < 0、anti-canonical class = 0、anti-canonical class > 0 的情況迴然不同。A. Futaki 是較早在 anti-canonical class > 0 的情況提出 obstructions 的人，雖然在他之前已經有關於這樣的 Kaehler manifold 的 Lie algebra 的結構定理(Lichnerowicz theorem)。Futaki 猜測 Futaki invariants 爲零是 Monge-Ampere equations 在 anti-canonical class > 0 的情況有解的充分必要條件。Futaki[F]並在次年推廣了他的 invariants 到在複流形上的常曲率方程(constant scalar curvature equation)的情況並猜測 Futaki invariants 爲零是在複流形上的常曲率方程有解的充分必要條件。(在複流形上的常曲率方程將在稍後介紹。)

Futaki 的猜測(關於在複流形上的常曲率方程)在 1988 年被 D. Burns 與 P. de Bartolomeis 反證[B-B]。D. Burns 與 P. de Bartolomeis 推測 constant scalar curvature 方程的 solvability 與 stability 有關，但是與什麼 stability 有關，他們也不清楚。

另一方面，由於 Gauge theory 的蓬勃發展，Einstein-Hermitian connections 的存在性與 slope stability 的關聯性終於在 1983-1987 年間被清楚地瞭解[U-Y]。S.-T. Yau 因此在 1990 年左右猜測 Monge-Ampere equation 在 anti-canonical class > 0 的情況的 solvability 與 stability 有關。

這樣的猜想經過了數年的懸置，到了 1993-1997 年由於 G. Tian 的工作而露出一些線索[T]。Tian 在 anti-canonical class > 0 的情況下造出 Calabi Conjecture 的反例，他並猜測 Monge-Ampere equation 在 anti-canonical class > 0 的情況有解的充分必要條件是“K-stability”。

三、在複流形上的常曲率方程以及相關的偏微分方程

在複流形上的常曲率方程(constant scalar curvature equation)是一類 4 階的橢圓偏微分方程。如果從偏微分方程的角度來看，這類的橢圓偏微分方程具有嚴重地非線性。還有一類相關的 6 階的橢圓偏微分方程稱爲“equation for extremal Kaehler metrics”。以下將介紹 Monge-Ampere equation、在複流形上的常曲率方程以及 equation for extremal Kaehler metrics 間的關係。

Calabi 從分析(analysis)的角度來看這類問題。假設 $(M;\omega)$ 是 Kaehler manifold，我們以 ρ_ω

來代表 ω 在 M 上所引導出的 Ricci curvature form。考慮 $\int_M |\rho_\omega|^2$ 在 Kaehler class $[\omega]$ 上 critical points。Calabi 稱這些 critical Kaehler metrics 為 extremal Kaehler metrics。

雖然 equation for extremal Kaehler metrics 是 6 階的橢圓偏微分方程，但是其實這樣的方程是一個 2 階的橢圓偏微分方程與一個 4 階的橢圓偏微分方程的合成。因此每個解其實都對映到一個 M 上的 holomorphic vector field。而且當 Futaki invariants 是零，equation for extremal Kaehler metrics 的解其實就是複流形上的常曲率方程的解。

另一方面，當 ρ_ω 的 cohomology class 與 Kaehler class $[\omega]$ 在同一條線上的時候，其實複流形上的常曲率方程剛好就可以化簡到 Monge-Ampere equation。因此當 ρ_ω 的 cohomology class 與 Kaehler class $[\omega]$ 在同一條線上的時候，其實解複流形上的常曲率方程剛好就相當於解 Monge-Ampere equation。

這些關聯其實說明複流形上的常曲率方程是 Monge-Ampere equation 的推廣。而 equation for extremal Kaehler metrics 其實是複流形上的常曲率方程的推廣。但是因為當 Futaki invariants 是零的時候，equation for extremal Kaehler metrics 的解其實就是複流形上的常曲率方程的解。所以當複流形 M 上沒有 nontrivial holomorphic vector field 的時候，刻意去解 equation for extremal Kaehler metrics 其實是沒有意義的。

四、與代數幾何的一些關聯

複流形上的常曲率方程的 solvability 與代數幾何的關聯主要來自於 K-stability。這是一個尚待瞭解的主題。

一般來說，我們對於複流形上的常曲率方程的解的唯一性有很好的瞭解[B-M]、[D1]、[D2]、[Y]。但是對於複流形上的常曲率方程的解的存在性卻瞭解有限。這也是為什麼考慮 K-stability 的原因。

K-stability 在 Tian 的文章[T]中首次以一種粗糙的形式被提出。Tian 証明當複流形 M 上沒有 nontrivial holomorphic vector field 的時候，如果 Monge-Ampere equation 在 anti-canonical class > 0 的情況有解，那麼 $(M;\omega)$ 一定是 K-stable。他並且猜測反過來也是對的。

在 Donaldson 的文章[D3]中，Donaldson 對 K-stability 與 test configurations 做了進一步深入的解釋。他並且猜測在複流形上的常曲率方程有解的充分必要條件是 K-stability。由於我們無法將所有的 test configurations 放在一個有限維的空間中，因此何種 test configurations 是關鍵的並不清楚。另一方面，是否能夠有 instrinsic 的關於 K-stability 的 criterion 也是一個值得研究的方向 (例如考慮可能的 destabilizing subscheme) 。這些問題很明顯地值得進一步探討。

參考文獻

[B-B] D. Burns and P. de Bartolomeis, *Inventiones Mathematicae*, **92**, 403 (1988).

[B-M] S. Bando and T. Mabuchi : *Uniqueness of Einstein-Kaehler Metrics Modulo Connected Group Actions*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 10, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1987).

[C] E. Calabi : *Extremal Kaehler Metrics*, Annals of Mathematics Studies, 102, Princeton University Press, New Jersey (1982).

[D1] S. K. Donaldson : *Remarks on Gauge Theory*, Complex Geometry and 4-Manifold Topology, Fields Medallists Lectures, World Scientific (1997).

[D2] S. K. Donaldson, *Journal of Differential Geometry*, **59**, 479 (2001).

[D3] S. K. Donaldson, *Journal of Differential Geometry*, **62**, 289 (2002).

[F] A. Futaki: *Kaehler-Einstein Metrics and Integral Invariants* (Lecture Notes in Mathematics 1314), Springer-Verlag (1988).

[H1] Y.-J. Hong, *Journal of Differential Geometry*, **53**, 465 (1999).

[H2] Y.-J. Hong, *Journal of Differential Geometry*, **60**, 389 (2002).

[L] N. C. Leung, *Journal of Differential Geometry*, **45**, 514 (1997).

[T] G. Tian, *Inventiones Mathematicae*, **137**, 1 (1997).

[U-Y] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *Communications on Pure and Applied Mathematics (Supplement)*, **39**, S257 (1986).

[Y] S.-T. Yau, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **l31**, 339 (1978).