

偏微分方程在凝態物理之應用

中正大學數學系 林太家

本人很榮幸獲得本屆國科會傑出研究獎，在此要感謝國科會每年提供研究計劃，理論科學中心提供學術交流的機會，以及中正大學數學系一些同仁們的支持與鼓勵，使本人能得到這項殊榮。願將近年來的研究成果（共分爲四類）與大家分享如下：

一、非傳統超導(unconventional superconductor)漩渦動態

在非傳統超導的研究領域中，d-波和 P-波超導漩渦動態是兩個重要的問題。本人研究被低溫物理廣泛接受的金茲伯-藍道(Ginzburg – Landau)方程所發展出的一套數學理論，藉以推導出描述漩渦動態的運動方程組。從微分方程的角度來看，金茲伯-藍道方程是與時間有關的拋物型偏微分方程，並且對 d-波超導和 P-波超導各有其對應的金茲伯-藍道方程；分別稱爲 d-波金茲伯-藍道和 P-波金茲伯-藍道方程。其與傳統金茲伯-藍道方程不同的是：d-波金茲伯-藍道具有對空間變數的四階偏微分算子並且是一退化橢圓算子。然而在偏微分方程的理論中，並無一般性的理論來處理這種退化橢圓算子。本人首先在此方程中找出四角對稱的漩渦解（four-fold symmetric vortex solution），利用其線性化算子的譜分析，推導一常微分方程組來描述 d-波漩渦的動態。這個常微分方程組可幫助我們找出 d-波漩渦動態的特性，特別是與傳統超導漩渦動態不同之處。此外，針對 d-波金茲伯-藍道方程，發展最小能量解以及四角對稱漩渦解的正則性(regularity)理論，對 d-波超導漩渦結構能更深入瞭解。

至於 P-波金茲伯-藍道方程是一複合的(coupled)拋物型偏微分方程組，而非單一方程式，並且所對應的解是向量值(vector-valued)而非純量值(scalar-valued)，所以解的每個分量都會出現漩渦，這使得整個問題非常複雜。由於各分量的漩渦彼此作用，產生了一些現象如：聯合的漩渦，區域牆(domain wall)以及漩渦度數(degree)是二分之一的漩渦等。我們發展出一種能量集中(energy concentration)的數學理論，使我們能推導

P-波漩渦的運動方程組是一常微分方程組，進而能獲得更多關於 P-波漩渦動態的性質和特性。

二、波氏-愛因斯坦凝態(Bose-Einstein condensates)之漩渦動態

近年來，波氏-愛因斯坦凝態已成爲物理界和應用數學界的熱門主題。其中，Gross-Pitaevskii 方程組是一被廣泛接受的數理模型，它是一非線性薛丁格(nonlinear Schrodinger)方程組來用描述耦合(binary mixture)的波氏-愛因斯坦凝態。我們利用數學中的守恒律，嚴格地證明其漩渦動態滿足的運動方程組。

三、超流(superfluid)和超導的漩渦線(vortex line)動態

在三維空間中，超流和超導漩渦是以漩渦線的形式出現，我們利用與時間有關的非線性薛丁格方程以及 S-波金茲伯-藍道方程，推演出描述漩渦線動態的運動方程。首先我們針對金茲伯-藍道的線性化算子，研究它的特徵值和特徵向量的漸進行爲(asymptotic behavior)；而后以這些結果來推導漩渦線的運動方程。

四、漩渦的混沌動態

從我們分析的結果，得到超流、超導以及波氏-愛因斯坦凝態漩渦的運動方程。基本上，它們是一些常微分方程組。對長時間動態而言，我們可利用數值模擬來觀察漩渦的各種軌跡如似週期(quasi-periodic)和混沌(chaotic)形態的軌跡並找出在不同情況下的分叉現象(bifurcation)。此外，我們找出具有拓樸同步(topological synchronization)的混沌軌跡。

結語

上述的研究成果，有些是和國內外一些學者合作的結果；這要感謝國科會和理論科學中心所提供的研究計劃補助和學術交流的環境。另外要感謝家人的支持和神的祝福，願將這些研究心得和大家分享。