Carleman 型估計及其應用

台灣大學數學系　王振男

一、背景及早期發展

假設函數 $u(x)$滿足一個微分方程或是微分不等式在一個連通集 A 上。給定一個 A 的子集合 B，我們想要知道在 A 的值是否能由在 B 上的值決定。換句話說，假如在 B 所有值為 0 是否在 A 上要全為 0？這就是所謂的"唯一延拓性"(unique continuation)的問題。當 B 是一個非特徵面(noncharacteristic surface)，這對應的是一歌西問題(Cauchy problem)的唯一性。另一面，如果我們想要由在 B 上的值來決定在 A 上的值是個"良置"的問題(well-posed problem)，則唯一性已經隱含在"良置"的定義裏面。所以我們感興趣的問題在於"非良置"問題(ill-posed problem)的唯一延拓性。例如，橢圓方程(elliptic equation)的歌西問題就是一個典型非良置問題。

一般來說，我們把唯一延拓性的問題分類成強唯一延拓性(strong unique continuation)，唯一延拓性(unique continuation)及弱唯一延拓性(weak unique continuation)。這個分類粗略來說是由 B 的大小來決定。當 B 是一個點且 $u(x)$在 B 上所有微分全為 0，對應的就是強唯一延拓性的問題；如果 B 是個非空的開集合，則對應是唯一延拓性；最後，如果 A 是整個歐式空間而 B 的餘集(也就是 $A\backslash B$)是個緊緻集，這是弱唯一延拓性的問題。一個大家比較熟悉的強唯一延拓性的例子就是調和函數(harmonic functions)，這個的推廣就是帶有解析係數的橢圓方程。在很多實際的問題，解析係數是個遙不可及的條件，所以我們必須考慮更一般的方程，甚至當係數是不可微的時候。

在這一方面，我們來到本文的主旨。在 1939 的一篇論文中，T. Carleman[1]證明了對二維薛丁格算子$\Delta+q(x)$的強唯一延拓性結果，在此位能函數 $q(x)$僅為局部有界。在這篇論文中，Carleman 引進下列不等式：

$$\left\| e^{\tau\phi(x)} u \right\|_{L^2(U)} \le C \left\| e^{\tau\phi(x)} \Delta u \right\|_{L^2(U)}, \qquad (1)$$

在(1)式中，U 是一個在 R2 上的有界開集合，$\phi(x)$ 是一個適當的相函數(phase function)，u 是任一個無限平滑及緊緻支持的函數，C 是一個與 τ 無關的常數而 τ 是個可任意選取的大數。爾後類似(1)的不等式便統稱為 Carleman 估計。對於證明唯一延拓性的問題，Carleman 劃時代的觀念主宰了超過六十年，尤其當我們考慮系統方程時，這是目前已知唯一的方法。值得一提的是，Garofalo 及林芳華教授[2]也發展另一套方法來處理唯一延拓性的問題，他們的方法不依賴 Carleman 估計，然而要推廣他們的方法到高階方程或是系統方程，目前仍困難重重。

Carleman 估計除了應用於證明唯一延拓性之外，近幾年來它也發展成處理一些反問題的利器。首先引進 Carleman 估計來處理反問題的 Bukhgeim 及 Klibanov [3]。他們的觀念成功的解決一些有關發展方程，例如波方程，的反問題。除了唯一延拓性及反問題之外，Carleman 估計也被成功地應用到處理偏微分方程控制的問題。對於純量方程，Carleman 估計及相關的問題有相當多的結果，但是對於系統方程，目前正處於萌芽的階段，有很多基本的問題仍有待解決，這將是我們下節的重點。

二、唯一延拓性

對於二階純量橢圓方程這個問題已有相當多的研究，我們並不想再贅述，有興趣的讀者請參閱參考文獻[4]。唯一延拓性的問題與歌西問題的唯一性有極大的關聯性，對於橢圓方程其實他們是相同的問題。當歌西問題為非特徵且係數為解析時，唯一性是著名的 Holmgren 定理。另一個古典的結果是 Hörmander 歌西問題唯一性定理，Hörmander 的結果並不要求解析係數，但是初始曲面要求是強擬凸(strongly pseudoconvex)。檢驗這個強擬凸條件並不是件容易的事情，尤其

當我考慮高階方程或是系統方程時。

除了上述兩個歌西問題唯一性的結果，Calderon 提出另一方法處理非特徵歌西問題。在 Calderon 的結果中係數要求是平滑函數，比較嚴格的限制是在於方程的特徵根（characteristic roots）。其中實數根必須爲單根，而複數根最多爲重根。有反例顯示這些重數限制條件是必要的[5]。由於這些限制條件，使得證明高階方程或是系統方程的唯一延拓性變得相當棘手。相對於二階純量橢圓方程，我們可以先考慮二階橢圓系統。一個最典型的二階橢圓系統就是線性彈性系統。當彈性系統的係數是同向性時（isotropic），強唯一延拓性已被證明[6]。在[6]這篇論文中，係數大致要求兩次可微分。當空間維度爲二時，係數可放得到 Lipschitz 就可以[7]。這裏值得一提的是對於二維或以上的二階純量橢圓方程，領導係數爲 Lipschitz 是唯一延拓性最弱的假設，比 Lipschitz 更弱的條件，唯一延拓性是不對的[8]。

同向性彈性系統是一特殊的二階橢圓系統，因爲它的領導算子更以被對角化且新系統仍然是二階。然而，這個重要的性質在非同向性彈性（nonisotropic）系統是不存在，縱使這個非同向性系統是同向性系統的小擾動。對於非同向性系統，已知唯一延拓性的結果是鳳毛麟角。簡化的殘留應力（residual stress）系統是一個最簡單的非同向性系統。對於此系統，唯一延拓性的結果証明於[9]而強唯一延拓性在[10]被證明。另外，對於更一般的非同向性彈性系統，當維度是二且係數滿足某些條件時，[11]證明唯一延拓性是成立的。上述是目前已知對二階橢圓系統的唯一延拓性的結果。對於更一般的橢圓系統，例如三維的非同向性彈性系統，目前仍是無法突破。本章節所敘述之結果，除了 Holmgern 定理及[6]的結果，所有的證明均在於推導出適當的 Carleman 型估計，可見 Carleman 型估計在唯一延拓性扮演舉足輕重的角色。

三、反問題

Careman 型估計在反問題上的應用大約有兩種途徑。第一種是經由唯一延拓性，利用唯一延拓性，我們能夠證明 Runge 逼近定理(Runge approximation theorem)，藉由這個定理，我們能在檢驗物體的表面及內部建立一個橋樑，使我們能夠決定檢驗物體內部所含的資訊，例如裂縫(cracks)的位置及形狀，這個檢驗在工程上就是所謂非破壞性檢測，因爲我們只能在物體表面收集我們所需的資料。在數學上這些表面資料可藉由歌西資料(Cauchy data)或 Dirichlet-to-Neumann map 來呈現，有興趣的讀者可參考[12]。

第二種方式是 Carleman 估計直接應用到問題上，通常這些反問題是建立在發展方程上，如波方程。更精確的描述，我們考慮底下的問題：

$$\begin{cases} a(x)u_{tt}-\Delta u=0 \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,T) \\ u=h \quad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T) \\ \mathrm{u(x,0)}=\mathrm{u}_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x) \end{cases} \tag{2}$$

在(2)式中，Ω爲 R^3 上一個有界開曲域，$h(x,t)$ 爲邊界條件而 (u_0,u_1) 是初始條件，假設 $a(x)>0$。在此我們關心的問題是如何決定 $a(x)$，如果我們能夠測量 u 在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上的 Neumann 值，也就是說 $\partial u/\partial\nu$ 在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 是給定的資料。第一個利用 Carleman 估計來處理此問題是由 Bukhgeim 及 Klibanov 所提出。對於不同型態的波方程，如電磁波、彈性波等，我們都可以考慮類似的反問題，目前這方面的研究正方興未艾。

參考文獻

[1] T. Carleman, *Ark. for Mat*., **26B**, 1 (1939).

[2] N. Garofalo and F.H. Lin, *Indiana Univ. Math. J*., **35**, 245 (1986).

[3] A.L. Bukhgeim and M.V. Klibanov, *Soviet Math. Dokl*., **24**, 244 (1981).

[4] H. Koch and D. Tataru, *Comm. Pure Appl. Math*., **54**, 339 (2001).

[5] P. Cohen, *O.N.R. Tech. Rep. No. 93*, Stanford University Press (1960).

[6] G. Alessandrini and A. Morassi, *Comm. in PDE*., **26**, 1787 (2001).

[7] C.-L. Lin and J.-N. Wang, *Math. Ann*., **331**, 611 (2005).

[8] A. Pliš, *Bull. Acad. Pol. Sci*., **11**, 65 (1963).

[9] G. Nakamura and J.-N. Wang, *SIAM J. Math. Anal*., **35**, 304 (2003).

[10] C.-L. Lin, *Indiana Univ. Math. J*., **53**, 557

(2004).

[11] G. Nakamura and J.-N. Wang, *Trans. AMS*, to appear (2005).

[12] G. Nakamura, G. Uhlmann, and J.-N. Wang, *J. Math. Pures Appl.*, **82**, 1251 (2003).