[研究成果報導]

環面上的數學 (Mathematics on Tori)

中央大學數學系 王金龍

環面 (torus, 或稱為輪胎面) 是僅次於球面的最簡單的幾何形體。數學上對環面的研究也有長遠的歷史。然而即使到今天，環面上的數學仍然神秘。無論從幾何，分析或代數的觀點，仍有許多基本問題懸而未決。我個人在最近幾年的研究工作中，恰好有一些與環面息息相關。因此特撰本文，旨在從幾種面相簡介環面上的古典數學與新數學。並指出一些值得繼續深入探究的問題.

一、環面上的古典數學

1. Weierstrass 橢圓函數論

給定平面上一個平行四邊形 P 對幾何學家而言，會自然地將 P 的對邊黏貼而做出一個環面 E (虧格為 1 的曲面)。對分析學家而言，會自然地想到以 P 為基本區域，利用 P 的平移將平面填滿。而 E 上的函數便可以想成平面上 (即雙變數) 的雙週期函數。對代數學家而言，E 作為一個 Riemann surface (一維複流形) 原本與代數相去最遠，然而 Weierstrass 利用他所發明的橢圓函數論(即雙週期亞純函數論)證明了 E 等價於一條形如 $y^2 = f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ 的三次曲線的軌跡，其中 x, y 均為複數，使得環面與數論緊緊地結合在一起。

Weierstrass 的出發點很簡單，如眾所易見，幾何形體的探討不外乎建立於我們對於其上的函數的了解的多少。根據 Liouville 原理或極大值原理，立刻知道 E 上的複變全純函數只有常數，因此只能退而求其次考慮亞純函數。然而 Cauchy 積分公式立即推出不存在僅有一個 pole 的亞純函數，因此只能考慮(在 $z = 0$)具有兩個 pole 的函數。這個基本上唯一的函數 $\wp(z)$ 被 Weierstrass 用雙重級數和所決定。由於 $\wp'(z)$ 在 $z = 0$ 有重數為 3 的 pole，一些簡易的計算便導致了上述的三次方程式。其中$(x, y) = (\wp(z), \wp'(z))$，而 g_2, g_3 則依類於 E 的形狀。

2. 一些經典的應用.

(1) 橢圓函數的第一個著名的應用是 Abel 關於不定積分 $\int dx/\sqrt{f(x)}$ 無法使用初等函數 (分式, 指數函數，對數函數，三角函數及其四則運算與合成) 來表達的驚人結果。Abel 的證明的基本精神是，$dx/\sqrt{f(x)} = dx/y = \wp'(z)\,dz/\wp'(z) = dz$. 如果將不定積分拓展到複變數，則此積分恰為 $z = z(x)$. 並且其反函數 $x = x(z)$ 恰為 Weierstrass 的雙週期函數 $\wp(z)$. 然而任何初等函數的反函數至多只能有單週期，因此原先的不定積分不能用初等函數表示。這個積分出現在計算橢圓的周長，故又稱橢圓積分。這也是橢圓函數一詞的歷史由來。

(2) 橢圓函數可以用來解一些重要的微分方程式 (可積系統)。如果我們將 $(\wp, \wp')$ 所滿足的三次方程不斷地微分，最後可以得到 $\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z)$. 因此 $u(z, t) = \wp(z)$ 恰為著名的 K-dV 方程 $u_t = u_{zzz} - 12uu_z$ 的 steady state (與時間無關) 的解。利用 $\wp$ 函數並無法明確看出如何找出與時間有關的解。這是因為根據 $\wp$ 函數的造法我們看不出 $\wp$ 如何對 $\tau = \omega_1/\omega_2$ 微分, 其中 ω_1, ω_2 為平行四邊形兩邊所代表的複數 (即兩個週期)。一個等價的橢圓函數理論 (theta 函數論) 約同時為 Riemann 與 Jacobi 所發明。這個理論的主角 $\theta(z, \tau)$ 對變數 τ 是以 Fourier 級數的方式呈現 (見下文)，因此其微分關係明確，而 K-dV 方程的具體解也因此可透過 $\theta(z, \tau)$ 得到。

(3) 單變數多項式方程式根的公式解。方程式 $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ 的根如何用係數表達一直是數學上的根本問題。十九世紀數學最輝煌的成就之一便是Galois關於根式解 (即僅用對於係數做四則運算與開根號以求根) 的存在性的判定法。Abel 曾稍早證明了五次方程式一般而言沒有根式解。Galois 徹底將根式解問題轉化為一個有限群的可解性的問題。然而，對於那些沒有根式解的方程式，除了數值逼近之外，更一般

的「公式解」果眞無法被找到嗎? 回答「不能」如何固然對思維有助益，然而回答「能」如何對數學或科學的發展更爲關鍵。所幸地，Kronecker 證明了五次方程式的根必定可以用根式與某一特殊環面的 $\wp(z)$ 的特殊値來表示。之後在 Klein, Jordan 與 Thomae 的一系列努力之下，終於獲致了任意次數的多項式方程的解均可以根式與廣義的 Riemann theta 函數的特殊值所表達。這個聯結需要深刻的代數幾何理論來搭建，如超橢圓曲線，Abel-Jacobi 理論，Abelian varieties 等。

3. Riemann 與 Jacobi 的 Theta 函數論

環面 $E = C/L$ (其中 L 爲格子點 $Z\omega_1 + Z\omega_2$) 的分類可透過 $\tau = \omega_1/\omega_2$ 來達成。由於不同的平行四邊形 P 可能獲致等價的環面 E，不難看出 E 與模空間 $M_1 = H/SL(2, Z)$ 上的點 τ 一一對應。其中 H 爲虛部爲正的複數所構成的集合，即 Poincare 的上半平面，而 $A \in SL(2, Z)$ 在 H 上的作用爲 $A\tau = (a\tau + b)/(c\tau + d)$. 注意到 $SL(2, Z) = \langle T, S\rangle$，其中 $T\tau = \tau + 1$, $S\tau = -1/\tau = \tau'$。Riemann 的觀點與 Weierstrass 不同。他認爲必須保有函數的全純性，而非絕對的雙週期性。他因此定義級數 (對所有整數 n 求和)。

$$\theta(z, \tau) = -i\ \Sigma\ \exp((n + 1/2)^2\ \pi i\tau)\ \exp((n + 1/2)\ 2\pi iz).$$

易見 $\theta(z + 1, \tau) = -\theta(z, \tau)$ 及 $\theta(z + \tau, \tau) = -\exp(-\pi i\tau - 2\pi iz)\ \theta(z, \tau)$。從現代的語言，這說明了$\theta(z, \tau)$ 是 E 上某一個全純線叢 (holomorphic line bundle) 的全純截面 (section)。$\theta(z, \tau)$ 滿足熱方程 $\theta_{zz} = 4\pi i\ \theta_\tau$. 更重要地，$\theta(z, \tau)$ 對於變數 τ 滿足模函數的性質 (modularity)，此即 Jacobi 的 imaginary transformation law：

$$\theta(z, \tau) = -i\sqrt{(i\tau')}\ \exp(\pi i\tau' z^2)\ \theta(z\tau', \tau'),$$

其中 $\tau' = S\tau = -1/\tau$.

作爲一個範例，考慮 $\tau'' = (\tau - 1)/(2\tau - 1) = ST^{-2}ST^{-1}\tau$ 以及函數 $f(\tau) = (\log \theta(1/2, \tau))'$。反覆套用 Jacobi 的公式可推出 $f(\tau)$ 滿足函數方程：

$$f(\tau'') = -(1 - 2\tau) + (1 - 2\tau)^2\ f(\tau).$$

這個關係式是最近我與林長壽院士在研究菱形環面上的「平均場方程」時所發現的。稍後我將說明它對於研究Green函數的極値點分布時所扮演的角色。

二、環面數學的現代觀 (selected)

1. 與雙有理幾何學之關聯.

對於一個複 n 維 (實 2n 維) 的複流形 X，它的基本拓樸不變量由上同調環 $H^*(X, Z)$ 給出。而其複結構誘導出一組上同調環內的陳省身特徵類 (陳類, Chern classes, $c_i(X)$, $i = 1, \dots, n$)。根據 Chern-Weil 理論，陳類可以透過曲率矩陣的特徵多項式 $c(X) = \det(I + R)$ 算出，故 $c_i(X)$ 可表爲一個 degree 2i 的微分式。對於一個 total degree 爲 2n 的多項式 $K(c) = K(c_1, \dots, c_n)$，其對應的積分值

$$g_K(X) = \int K(c(X)) = \int K(c_1(X), \dots, c_n(X))$$

稱爲一個 Chern number (of type K)。由於這是一個最高次數的微分式的積分，我們很自然地會問 K 是否定義了一個測度？精確而言，對於一個雙有理全純映射 $\phi: Y \to X$，換變數公式

$$\int K(c(X)) = \int J(\phi)\ K(c(Y))$$

是否仍然成立？其中 $J(\phi)$ 僅能依賴於 ϕ 的 Jacobian 除子 div(det $D\phi$)。這個問題的重要性在於，若 K 滿足換變數公式，則不變量 g_K 對於「c_1 等價」的複流形 X 和 X' 有相同的値。如弦理論中的雙有理 Calabi-Yau 流形，代數幾何中的雙有理極小模型 (birational minimal models) 均爲 c_1 等價的範例。

結果是，並非所有的 K 均滿足換變數公式。事實上，如果我們將對應於不同維度的 K 放在一起考慮，可以假定 K 滿足 $K(c(M).c(N)) = K(c(M)).K(c(N))$。這就是 Hirzebruch 的乘法序列 (multiplicative sequence)。這時 K 可以被冪級數 $Q(x) = K(1 + x)$ 完全決定。精確而言，若 $c(X) = \det(I + R) = \prod(1 + x_i)$, 則

$$g_K(X) = \int K(c(X)) = \int \prod Q(x_i).$$

令冪級數 $f(x) = x/Q(x)$，則筆者在 [1] 的主要結果之一說明了 K 滿足換變數公式充分必要

於 g_K 是所謂的複橢圓虧格 (complex elliptic genera)，即存在一個環面 E，無限制的參數 k 以及一個 non-torsion marked point $z \in E$，使得

$$f(x) = \exp((k + \zeta(z))x)\, \sigma(x)\sigma(z)/\sigma(x + z).$$

其中 $\zeta(z) = -\int^z \wp(w)\, dw$, $\sigma(z) = \exp(\int^z \zeta(w)\, dw)$ 為 Weierstrass 的 ζ 與 σ 函數 (由於積分路徑的關係，他們不再是雙週期函數，事實上 σ 和 Riemann 的 θ 函數基本上是等價的)。

這個結果的神秘之處在於「環面 E 從何而來?」。筆者在 [1] 係先將換變數公式的存在性轉化為一個包含 f(x), f(y), f(x – y) 與 f(y – x) 的代數函數方程。並提供了兩個方法求解。筆者原先的方法係證明複橢圓虧格的 f(x) 與函數方程的 f(x) 有相同的自由度 (均為 4 個)，然後再進行冪級數的低次項比較。第二個方法是與于如岡的合作。我們不斷地對函數方程微分，代換以消去變數 y，最後導出一條與 $\wp$ 等價的常微分方程式，f(x) 因而得解。

筆者認為，這背後顯然隱藏有更深刻而仍未知的道理。當 k = 0 (g_K 為實橢圓虧格) 且 X 為 Calabi-Yau 時，g_K 可以被理解為弦理論中 g = 1 的 partition function，或 loop space L(X) 上的 Dirac 算子的 index. 但是以上換變數公式的理解卻指向 L(X) 上某種橢圓測度的存在性，之間的關聯值得進一步探索。

2. 與非線性偏微分方程的關聯.

這是一個與林長壽院士的合作 [2]。我們感興趣的是環面 E = C/L 上的平均場方程 (mean field equation，或稱 Liouville 方程)：

$$\Delta u + 8\pi\, (e^u - 1/|E|) = 8\pi\, (\delta_0 - 1/|E|).$$

利用 Liouville 的 developing map 與 Schwartz 微分，可以證明 (此為 [2] 中的第一個主要結果)：Laplace 算子的 Green 函數 G(z) 的每一對非半週期極值點 (critical points) 恰對應於一組平均場方程的單參數解。這裡 G(z) = G(z, 0) 為偶函數，因此若 2z = 0 (mod L)，即 [z] = [-z] = p $\in$ E，則 $G(z) = G(-z) \Rightarrow \nabla G(p) = \nabla G(z) = -\nabla G(-z) = -\nabla G(p) \Rightarrow \nabla G(p) = 0$。即三個半週期點均為「必有之極值點」。而方程式可解恰對應於 non-trivial 極值點的存在性。不難證明若 E 來自矩形 (τ 為純虛數)，則無 non-trivial 極值點，因此方程式無解。矩形無解的結果在林長壽與陳俊全稍早的工作中就已獲得。因此 [2] 的重點在於提出利用 Green 函數的極值點來研究非線性方程的可解性。

令 $z = u + iv$, $\tau = a + ib$ 且不仿假設 $\omega_1 = 1$. Green 函數 G(z, w) 事實上可以用橢圓函數明確地表示出來：

$$G(z, w) = -(2\pi)^{-1} \log|\theta(z - w)/ \theta'(0)| + (2b)^{-1} (\mathrm{Im}\,(z - w))^2.$$

因此，$\nabla G(z) = 0 \Leftrightarrow \partial G/\partial z = -(4\pi)^{-1}((\log \theta)_z + 2\pi i v/b) = 0$。若用 Weierstrass 橢圓函數來表達，且令 $z = t\omega_1 + s\omega_2$ ($t, s \in R$)，則條件更為簡潔：

$$(*) \quad \nabla G(z) = 0 \Leftrightarrow \zeta(t\omega_1 + s\omega_2) = t\eta_1 + s\eta_2.$$

其中 $\eta_1 = \zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = 2\zeta(\omega_1/2)$, $\eta_2 = \zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) = 2\zeta(\omega_2/2)$ 為擬週期。

我們可以證明當 E 來自正菱形時 ($\tau = (1 + i\sqrt{3})/2$), (*) 至少有五個解，因為 $\omega_3/3$ 和 $2\omega_3/3$ 也都是極值點 (其中 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$)。事實上，利用電腦的模擬，我們得到一項令人驚訝且振奮的觀察：我們發現在環面的模空間 M_1 上有一條包住 $(1 + i\sqrt{3})/2$ 的光滑曲線 Γ，使得 $M_1 - \Gamma = \Omega(3) \cup \Omega(5)$。其中區域 $\Omega(3)$ 對應的環面都只有三個極值點，因此平均場方程無解。而區域 $\Omega(5)$ 對應的環面都恰好有五個極值點，因此平均場方程恰有一組單參數的解，即在等價之下解存在且唯一。可惜的是，目前我們還無法完整且嚴格地證明此一猜想。

在[2]中，我們運用 methods of deformations 對 $\mathrm{Re}\,\tau = 1/2$ 的所有環面的三個半週期點 $\omega_i/2$, i = 1, 2, 3 進行退化分析。例如我們證明 $\omega_1(\tau)/2$ 在 $b = \mathrm{Im}\,\tau$ 從 0 遞增至 ∞ 的過程之中，恰於兩個值 $b_1 < \sqrt{3}/2 < b_2$ 是 G(z) 的退化極值點。這給出了上述猜想一個重要的證據。整個退化分析係建立於兩個關於模函數 (modular functions) 的基本不等式 (令 $e_i = \wp(\omega_i/2)$, i = 1, 2, 3)：

$$(e_1 + \eta_1)_b > 0 \text{ 與 } e_1 - 2\eta_1 > 0.$$

在這篇非技術性的報告中，筆者仍想藉由一

點細節以強調古典數學在現代問題上的作用。以前者爲例，令 $A(n) = n(n+1)/2$, $r = \exp(-2\pi b) < 1$, 則可算得

$$(e_1 + \eta_1)_b = -4\pi (\log \theta(1/2, \tau))_{bb}$$

$$= -16r^{1/4}\pi^2|\theta|^{-2} \Sigma_{n>m} (A(n) - A(m))^2 (-r)^{A(n)+A(m)}$$
$$= +16r^{1/4}\pi^2|\theta|^{-2} (r + 9r^3 - 4r^4 - 36r^6 + 25r^7 + \dots).$$

當 $r \le 1/5$ 時 ($b > 0.256$)，不難直接估計此爲正. 當 $1/5 < r < 1$ 時 (b 很小)，直接估計很難進行. 回憶 Part I 結尾時所舉例的 $f(\tau)$, 有 $e_1 + \eta_1 = -4\pi f(\tau)$。故不等式相當於證明 $f((1 + ib)/2)$ 爲 b 的遞減函數。以上已經說明了當 $b > 0.256$ 時爲眞。在 $\tau'' = (\tau - 1)/(2\tau - 1)$ 的變換下，$b < 1/2$ 正好被對到 $b > 1/2$，而 $f(\tau)$ 的函數方程正好就從 $b > 1/2$ 函數的遞減性推出 $b < 1/2$ 的遞減性. 故不等式得證 (這也是目前我們唯一找到的證法)。

3. 與數論的關聯.

自從二十世紀初以降，環面中最深刻的數學仍屬數論中的橢圓曲線論。這個理論企圖徹底了解平面三次曲線所有有理數解的結構。由於筆者並非數論專家，不宜對此多加著墨。只想指出上述 Green 函數的研究和數論可能有的關係。

多元二次方程的有理數解問題早爲 Hasse-Minkowski 定理所解決。方法是 local to global principle。而 local 係包含 mod p 的解 (p 爲任意質數) 與實數解。這個原則在多元三次 (或高次) 方程式是有障礙的，即局部解未必能連接成一個大域的解 (有理數解)。對於三次曲線 E，有兩種經典的理論企圖描繪此一從局部至大域的原則。第一個方法是利用 L 函數。這個方向有出名的 Taniyama 猜想與 Birch/ Swinnerton-Dyer 猜想。前者說 L(E, s) 函數基本上是一個模函數，有高度的對稱性。它約於十年前爲 Wiles 所證明，也因而證出了 Fermat 最後定理。後者進一步描述如何從 L(E, s) 在 $s = 1$ 的 Taylor 展式讀出有理數解的結構。然而這方面進展仍然極爲有限。至今，三次曲線的有理數解仍是數學上最神秘的問題，當然也有廣泛的應用 (如密碼學)。L 函數的方法在高維度代數幾何學也有許多發展與應用。例如筆者曾將它應用於研究 c_1 等價流形之間的 Hodge 結構的同構問題 [3]。

第二個方法是 Arakelov 理論。如前，它把一條定義在 Z 的曲線 E 想成一個布於 Spec Z ∪ {∞} 上的算術曲面。但它連結局部解的機制是所謂的「算術相交理論」。在每一個質數 $p \in$ Spec Z 上，E_p 爲 E 模 p 後定義於 Z/p 的曲線. 在 ∞ 上我們有 Riemann surface E(C)。一個點 $D \in E(K)$ (K 爲 Q 的任一有限擴張體) 給出一個截面。對於兩個點 D, D′, 其交點數(D, D′) 在 p 的貢獻可由 scheme-theoretic 的相交數給出. 但在無窮遠 ∞ 處，其貢獻由 Green 函數 G(D, D′) 所指定。在一般文獻討論中，對於 Green 函數的漸進行爲時有著墨，但對於其極値點與 Arakelov 理論的進一步關聯則未見有任何討論。鑒於此，筆者願提出此一思考方向以結束本文。

參考著作

[1] C.-L. Wang, *J. Algebraic Geometry*, **12**, 285 (2003).

[2] Chin-Lung Wang with C.-S. Lin; Elliptic functions, Green functions and the mean field equations on tori, Preprint.

[3] C.-L. Wang, *J. Differential Geometry*, **60**, 345 (2002).