非線性薛丁格方程組及其數學分析

台灣大學數學系　林太家

非線性薛丁格方程組

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi_1 = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_1 + U_{11}|\psi_1|^2\psi_1 + U_{12}|\psi_2|^2\psi_1 \\ i\hbar\partial_t\psi_2 = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_2 + U_{22}|\psi_2|^2\psi_2 + U_{12}|\psi_1|^2\psi_2 \end{cases}$$

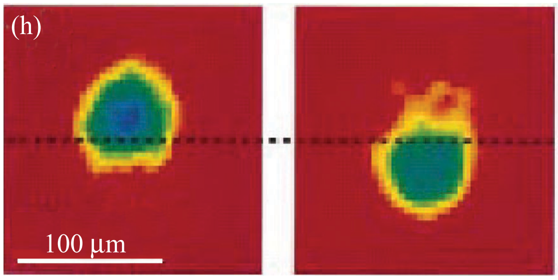
是一重要數理模型已被廣泛地應用在玻瑟—愛因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation)和非線性光學(nonlinear optics)這兩個物理領域，其中有許多有趣的數學問題值得研究。自從玻瑟—愛因斯坦凝聚實驗成功並於 2001 年榮獲諾貝爾獎以來，許多物理理論和實驗結果陸續發表。理論物理學家把非線性薛丁格方程組(Systems of nonlinear Schrödinger equations)的空間維度降至一維，藉以能將非線性薛丁格方程組視為可積系統(integrable system)，進而能找到很多解(solution)來研究相關問題。然而實驗報告卻多半都是關於空間維度是二維和三維的結果；同樣的情況也發生在非線性光學中關於 photorefractive medium 的孤粒子波問題。一般而言，空間維度是二維和三維的非線性薛丁格方程組是非可積系統(non-integrable system)，需要發展比較複雜的數學理論加以研究，數學家可以在這項領域中扮演重要的角色。在本文裏我們將介紹研究偏微分方程的數學家如何針對非線性薛丁格方程組作數學分析，進而得到具有物理意義的結果。

基本上非線性薛丁格方程組可分為與時間有關和無關兩個方向來研究，其中與時間無關非線性薛丁格方程組可利用分離變數法簡化為非線性橢圓型方程組，進而可利用已過對於單一非線性橢圓型方程式所發展的研究方法推廣到系統方程組。最近三年來，我們已經針對與時間無關非線性薛丁格方程組的最小能量解(least-energy solution)、有界態解(bound state solution)和針狀解(spike solution)加以研究，獲得許多成果，這些結果可視為對於玻瑟—愛因斯坦凝聚和非線性光學所有現象的研究。

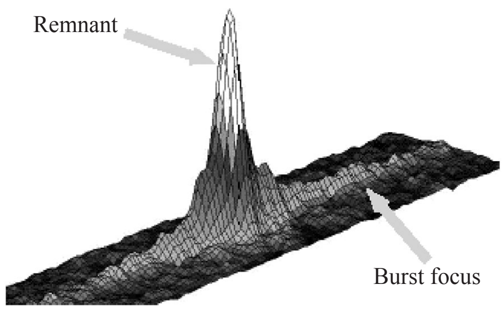
玻瑟—愛因斯坦凝聚是由趨於絕對溫度零度的原子氣體凝結而成，當兩種互相排斥的冷原子且同種原子間作用力亦為排斥力（即 $U_{11}, U_{22} > 0, U_{12}$ sufficiently large）混合時會發生像位分離(phase-separation)的現象[1]，正如油與水混合後會產生介面將油和水分開一樣。實驗觀察到分開後的兩種冷原子分佈如圖一。

我們利用橢圓型偏微分方程的分析技巧得到關於有界態解的點化估計(pointwise estimate)，進而推導出漸近行為對應於像位分離現象。這項結果可以推廣到任意 N 項非線性薛丁格方程式的複合系統，分析有界態解的像位分離現象，詳如[2]。

當冷原子間的作用力由排斥轉為吸引時（藉由 Feshbach resonance），針狀(spike)現象在單一(single)玻瑟—愛因斯坦凝聚的實驗中[3]被發現如圖二。



圖一　左右兩圖分別代表兩種凝聚原子的分佈，明顯有介面分離這兩種凝聚原子的情形



圖二　單一凝聚原子形成針狀分佈的情形

因此我們可以預期在成雙凝聚(double condensate)中，吸引力的作用（即$U_{11}, U_{22} < 0$）會導致針狀現象出現在每一個分量波函數$\psi_j, j = 1,2$上，但兩者間如何交互作用是一個有趣的數學問題。我們利用變分法(variational method)來分析基態解中針狀現象的交互作用與係數U_{12}的關係，基本上$U_{12} > 0$會使兩者互相排斥，而$U_{12} < 0$使兩者互相吸引，詳如[4]。另外兩分量波函數的井位能(trap potential)對於針狀現象的影響見[5]。

N 項的非線性薛丁格方程組是用來描述非線性光學中 photorefractive medium，詳述如下：

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_j = \Delta\Phi_j + \mu_j\left|\Phi_j\right|^2\Phi_j \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i\neq j}\beta_{ij}\left|\Phi_i\right|^2\Phi_j \text{ for } y\in R^2, t>0, \\ \Phi_j = \Phi_j(y,t)\in \mathbb{C}, \ j=1,\cdots,N, \\ \Phi_j(y,t)\to 0 \text{ as } |y|\to+\infty, t>0, \end{cases}$$

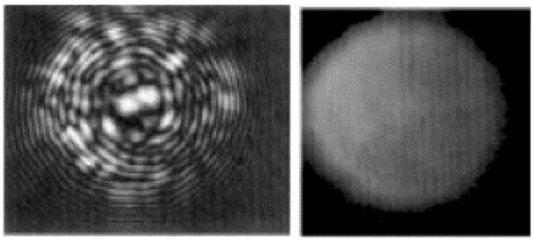
其中Φ_j代表第 j 項光波函數、μ_j爲正數，β_{ij}'s 爲非零常數影響第 i 和 j 項波函數。理論物理學家多年來針對空間一維(n=1)發展了很多方法來研究上述方程組，但實驗結果[6]卻發現了空間二維(n=2)的向量亮孤子(vector bright soliton)鳥瞰圖三。

另外延 x,y 方向的切割(cross section)圖分述如圖四。

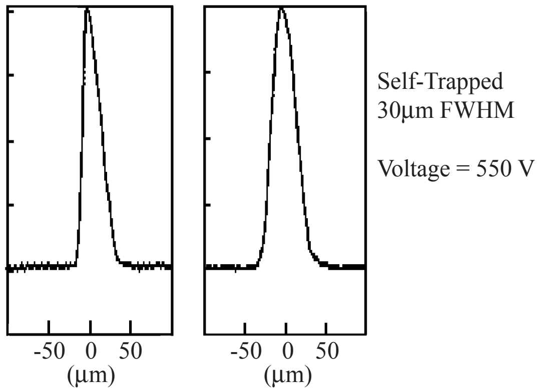
理論和實驗的落差提供我們一個絕佳的機會以數學分析來研究二、三維的向量亮孤子問題，我們探討β_{ij}'s 如何影響向量亮孤子發生的位置和漸近行爲並且證明相關定理，詳如[7]。

退化費米氣體(degenerate Fermi gas)和玻瑟氣體(Bose gas)的混合可由以下的非線性薛丁格方程組來描述。

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi^B = -\dfrac{\hbar^2}{2m_B}\Delta\varphi^B + V_B(x)\varphi^B + g_B N_B\left|\varphi^B\right|^2 \\ \qquad\qquad + g_{BF}\sum\limits_{j=1}^{N_F}\left|\varphi_j^F\right|^2\varphi^B \\ i\hbar\partial_t\varphi_j^F = -\dfrac{\hbar^2}{2m_F}\Delta\varphi_j^F + V_F(x)\varphi_j^F + g_{BF}N_B\left|\varphi^B\right|^2\varphi_j^F, \\ \qquad x\in\Omega, \quad t>0, \\ j=1,\cdots,N_F \end{cases}$$



圖三　兩圖是亮孤子(bright soliton)形成前後波函數分佈之鳥瞰



圖四　兩圖是亮孤子延著 x，y 方向投影圖

其中$g_B > 0, g_{BF} < 0$, 與原子的作用力有關，N_B, N_F爲玻瑟子和費米子數目，一般而言這是個非常大的系統方程組。我們利用變分法証明二、三維共生亮孤子(symbiotic bright soliton)的存在性以及這些亮孤子和井位能V_B, V_F間的關係，詳如[8]。

因爲玻瑟一愛因斯坦凝聚有超流性(superfluidity)，所以可從流體的角度來研究與時間有關的非線性薛丁格方程組，考慮有趣的動態解。例如我們研究方程組的自相似解(self-similar solution)進而構造同步爆破解(simultaneous blow-up solution)的許多形式(pattern) [9]。另外關於可壓縮(compressible)及不可壓縮(incompressible)極限問題[10]，了解超流性在一些可藉由 Feshbach resonance 達到的條件下與經典可壓縮、不可壓縮尤拉方程的關係，進而能對於方程組的介面(interface)和激波(shock wave)問題作更深入研究。

參考資料

[1] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.*,

81, 1539 (1998).

[2] S.-M. Chang, C.-S. Lin, T.-C. Lin and W.-W. Lin, *Physica D*, **196**, 341 (2004).

[3] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Nature*, **19**, 295 (2001).

[4] T.-C. Lin and J. Wei, *Ann. I. H. Poincaré - AN*, **22**, 403 (2005).

[5] T.-C. Lin, and J. Wei, *J. Differential Equations*, **229**, 538 (2006).

[6] M. Mitchell, Z. Chen, M. Shih and M. Segev, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 490 (1996).

[7] T.-C. Lin and J. Wei, *Math. Phys.*, **255**, 629 (2005).

[8] T.-C. Lin, and J. Wei, *Nonlinearity*, **19**, 2755 (2006).

[9] T.-C. Lin, and J. Wei, *Physica D*, **220**, 99 (2006).

[10] T.-C. Lin and P. Zhang, *Commun. Math. Phys.*, **266**, 547 (2006).