無窮維空間上的 Lévy 機率測度

國立高雄大學應用數學系　李育嘉

一、研究動機

設$(\Omega, \mathcal{M}, P)$爲一機率空間，$\{X(T); t\in \mathbb{R}\}$爲一可加隨機過程（即具有獨立增量之隨機過程是也），其增量 $X(t)-X(s)$ $(t>s)$ 之特徵函數

$$\psi_{st}(r) = \mathrm{E}[e^{ir(X(t)-X(s))}])$$

滿足下式：

$$\psi_{st}(r) = e^{(t-s)f_X(r)}, \tag{1.1}$$

上式中 $f_X(r)$ 界定如下：

$$f_X(r) = i\mu r - \frac{\sigma^2 r^2}{2} + \int_{|u|>0}\left(e^{iru}-1-\frac{iru}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}d\beta(u), \quad r\in\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

(1.2)式中 μ 爲一常數，β 爲一右連續遞增函數且滿足 $\beta(-\infty)=0$ ，$\beta(+\infty)<\infty$ ，及 $\sigma^2=\beta(0)-\beta(0-)$ ，等性質。(1.2)式中 $d\beta_0(u)=(1+u^2)/u^2 d\beta(u)$ ，又叫做 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上 X 的 Lévy 測度。

本研究報告中，吾人只考慮滿足 $X(0,\omega)=0$ a.e.之 Lévy 過程。

令$\mathcal{S}$表 Schwartz 空間，$\mathcal{S}'$ 表其對偶(dual space)，$\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ 表 $\mathcal{S}'$ 之 Borel 代數。當 β 滿足以下條件時：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\,d\beta(u)<+\infty, \tag{1.3}$$

前文[2]中吾人已證知存在唯一定義於 $(\mathcal{S}'\mathcal{B}(\mathcal{S}'))$ 上之測度Λ，其特徵函數 $\mathcal{C}(\eta)$ $(\eta\in\mathcal{S})$ 爲：

$$\mathcal{C}(\eta)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(\eta(t))dt\right\}. \tag{1.4}$$

又當

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2\,d\beta(u)<\infty \tag{1.5}$$

時，吾人有

(a)給予任一$\eta\in\mathcal{S}$ ，

$$\mathbb{E}[i(\cdot,\eta)=\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(\eta(t))dt\right).$$

(b)給予任一$\eta\in\mathcal{S}$ ，

$$\mathbb{E}[(\cdot,\eta)^2]=\left(\kappa+\int_{-\infty}^{\infty}ud\beta(u)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)d\beta(u)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)^2dt\right).$$

由(b)，給予任一$\eta\in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$，吾人可選擇$\mathcal{S}$中之元素列 $\{\eta_n\}$ 使得，當 $n\to\infty$ 時，$\eta_n\to\eta$ 於 $L^1\cap L^2(\mathbb{R})$ 之中。此意涵 $(\cdot,\eta_n)$ 爲 $L^2(\mathcal{S}',\Lambda)$ 裡的哥西(Cauchy)函數列，因此 $(\cdot,\eta_n)$ 對 $L^2(\mathcal{S}',\Lambda)$ -範收斂，吾人定義其極限爲

$$\langle\cdot,\eta\rangle := L^2(\mathcal{S}',\Lambda)-\lim_{n\to\infty}(\cdot,\eta_n),$$

則 $(\cdot,\eta)$ 成爲一隨機變數，其特徵函數爲

$$\mathbb{E}[i(\cdot,\eta)]=\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(\eta(t))dt\right).$$

取 $\eta(t)=\mathrm{sng}(t)\mathbf{1}_{[t\wedge 0,t\vee 0]}$ ，吾人便可將 Lévy 過程 $X(t)$ 在 $(\mathcal{S}',\mathcal{B}(\mathcal{S}'),\Lambda)$ 表爲

$$X(t;x)=\begin{cases}\langle x,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle, & \text{if } t\geq 0\\ -\langle x,\mathbf{1}_{[t,0]}\rangle, & \text{if } t<0,\ x\in\mathcal{S}'.\end{cases} \tag{1.6}$$

有了 Lévy 過程的函數表示，無人便可利用分析來研究白噪聲泛函，其基本工具是 Segal-Bargmann 變換（簡稱 S 變換）。欲定義 S 變換，吾人須知 Lévy-Itô 定理，今介紹如下：

(1-1)首先吾人介紹 Lévy 過程的 ***Lévy-Itô*** 分解：

令 $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2_*)$ 表 $\mathbb{R}^2_*=\mathbb{R}^2\setminus\{t,0):t\in\mathbb{R}\}$ 之所有有界的 Borel 子集的集合。然後在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_*)$ 定義測度 $d\nu(t,u)=d\beta_0(u)dt$ 。給予 $E\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2_*)$ ，在 $(\mathcal{S}',\mathcal{B}(\mathcal{S}'))$ 定義隨機測度

$$N_X(E;x)=\left|\{(t,u)\in E: X(t;x)-X(t^-;x)=u\}\right|,$$

則 $N_X(E;\cdot)$ 具 Poisson 分佈且帶有強度測度(intensity measure) ν ，$\{N_{0,X}=N_X(E;x)-\nu(E):$

$E\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}_*^2);x\in\mathcal{S}'\}$ 成爲均值爲零的獨立隨機測度。

(1-2) $X(t)$ 的 ***Lévy-Itô*** 分解是說：若 $b>a$，則存在與系統 $\{N_{0\,X}(E):E\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}_*^2)$ 獨立的 1-維的布朗運動 $W_X=\{W_X(t):t\in\mathbb{R}\}$ 使得

$$X(b)-X(a)=(b-a)\mu+(W_X(b)-W_X(a)) +\int_{\mathbb{R}_*^2}u\,1_{(a,b]\times\mathbb{R}_*}(t,u)dN_X(t,u).$$

設 λ 爲 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上的測度：

$$\lambda(t,u)=(1+u^2)d\beta(u)dt.$$

Lévy-Itô 分角等導出 $L^2(\mathcal{S}',\Lambda)$ -值之隨機制度 M 於 $\{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2):\lambda(E)<+\infty\}$ 之上，如下式：

$$M(E)=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}1_E(t,0)dB(t)+\int_{\mathbb{R}_*^2}u\,1_E(t,u)dN_0(t,u).$$

此系統

$$\{M(E;x):E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\lambda(E)<+\infty;x\in\mathcal{S}'\}$$

形成一個均值爲零的獨立系統且有以下性質

$$\mathbb{E}[M(E)M(F)]=\lambda(E\cap F)$$

(1-3)接著吾人介紹 ***Lévy-Itô*** 重積分

令 V_n 表定義於 $(\mathbb{R}^2)^n$ 之上具以下形式的複數值的對稱簡單函數

$$\sum_{i=1}^m a_i\hat{1}_{E_1^i\times\cdots\times E_n^i},\tag{1.7}$$

上式中對任意正整數 $j=1,\ldots,n$ ，$\lambda(E_j^i)<+\infty$ ，$E_1^i<\cdots<E_n^i$ ，$\hat{1}_{E_1^i\times\cdots\times E_n^i}$ 表 $1_{E_1^i\times\cdots\times E_n^i}$ 之對稱化函數。此處“ $A<B$ ”, 意指當 $(t_1,u_1)\in A$ 又 $(t_2,u_2)\in B$ 時 $t_1<t_2$ 。

給予任 $g\in V_n$ 具(1.7)形式者，g 對於 M 的重積分 $I_n(g)$ 定義如下：

$$I_n(g)=\int_{\mathbb{R}^2}\cdots\int_{\mathbb{R}^2}g(s_1,\ldots,s_n)dM(s_1)\cdots dM(s_n) =\sum_{i=1}^m a_i\prod_{j=1}^n M(E_j^i).$$

則吾人有以下等式

$$\|I_n(g)\|^2_{L^2(\mathcal{S}',\Lambda)}=n!\int_{\mathbb{R}^2}\cdots\int_{\mathbb{R}^2}|g(s_1,\cdots,s_n)|^2d\lambda(s_1\cdots d\lambda(s_n).\tag{1.8}$$

因 V_n 緊緻於 $\hat{L}_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\lambda^{\otimes n})$ 利用(1.8), I_n 便可擴張至 $\hat{L}_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\lambda^{\oplus n})$ 之上。給予 $f\in\hat{L}_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\lambda^{\otimes n})$ 此 $I_n(f)$ 便稱作 f 對於 M 的 n 階重積分。

甚者，當 $g\in\hat{L}_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\lambda^{\otimes n})$
且 $h\in L_c^2((\mathbb{R}^2)^m,\ \lambda^{\otimes m})$ 時，吾人可得

$$\int_{\mathcal{S}'}I_n(g)(x)\overline{I_m(h)}(x)\Lambda dx=n!\delta_{n,m}.$$

1.1 定理〈Lévy-Itô 定理〉[1]

給與任一函數 $f\in(L^2)\ =L^2(\mathcal{S}',\Lambda)$，則存在函數列 $\{f_n:f_n\in\hat{L}_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\ \lambda^{\otimes n})\}$ 使得 f 可唯一表成 $I_n(f_n)$ 正交直和：

$$f=\sum_{n=0}^\infty\oplus I_n(f_n)$$

且有

$$\|f\|^2_{(L^2)}=\sum_{n=0}^\infty n!|f_n|^2_{L_c^2((\mathbb{R}^2)^n,\lambda^{\otimes n})}.$$

以符號表示，吾人寫作 $f\sim(f_n)$ 。

定義 S-變換如下：給予任一 $\varphi\sim(\varphi_n)$ ，與任一 $g\in L_c^2(\mathbb{R}^2,\lambda)$ ，定義

$$S\varphi(g)=\sum_{n=0}^\infty\int_{\mathbb{R}^2}\cdots\int_{\mathbb{R}^2}\phi_n(x_1,\ldots,x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)d\lambda(x_1)\cdots d\lambda(x_n),$$

在(1.5)的假設下，吾人曾證得

1.2 定理[2]

設 $\mathcal{L}=\{h\in L_c^2(\mathbb{R}^2,\lambda)\,|\,h^*\in L_c^1\cap L_c^\infty(\mathbb{R}_*^2,\nu)\}$ ，上式中 $d\lambda(u,t)=(1+u^2)d\beta(u)dt$ ，$h^*(t,u)=uh(t,u)$。則，給予任一 $\varphi\in L^2(\mathcal{S}',\Lambda)(\equiv L^2(\mathcal{K}',\Lambda))$ 與任一 $h\in\mathcal{L}$ ，φ 的 S-變換 S_φ 可表示如下式：

$$S_\varphi(h)=\int_{\mathcal{S}'}\varphi(x)\mathcal{E}_X(h)(x)\Lambda(dx),$$
$$\mathcal{E}_X(h)(x)=\Gamma_G(X;h)(x)\cdot\Gamma_P(X;h)(x)$$

上式中

$$\Gamma_G(X;h)(x) =\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,0)^2dt+\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,0)dW_X(t;x)\right);$$
$$\Gamma_P(X;h)(x) =\exp\left(-\int_{\mathbb{R}_*^2}h^*(\omega)d\nu(\omega)\right)\prod_{t\in\mathbb{R}}(1+h^*(t,j_X(t;x))).\tag{1.9}$$

在條件(1.3)，(1.5)的限制下，一些重要的隨機過程如穩定過程(stable process)被排除在以上

之研究外，因此吾人不得不問

- 若無(1.3)，(1.5)條件的限制會如何？Lévy 機率測度Λ依然會存在嗎？
- 若Λ存在的話，其可測支撐集(measurable support) Supp (Λ)會落在 S 裡嗎？
- X(t)的函數表示如何？
- S-變換又如何用定理 1.1 表示？

本文中，筆者將對以上問題逐一解答。

二、$\mathcal{K}'$上之 Lévy 機率測度的存在性

令$\mathcal{K}$表$\mathbb{R}$上無限次可微且有緊緻支撐集的函數所形成的空間。

令$\mathcal{K}(a)$表諸多$\mathcal{K}$裡的函數而其支撐集包含於$[-a, a]$者 $a>0$。則$\mathcal{K}(a)$成爲核空間(nuclear space)，由範數$\{|\cdot|_{a,n}\}$衍生其拓樸，$|\cdot|_{a,n}$定義如下：

$$|\eta|_{a,n}=\sum_{0\le m\le n}\int_{-a}^{a}|\eta^{(m)}(t)|^2dt,$$

$\forall\eta\in\mathcal{K}(a)$。

$\mathcal{K}=\cup\mathcal{K}(a)$並採用歸納極限(inductive limit)爲其拓樸。令$\mathcal{K}'$爲$\mathcal{K}$的拓樸對偶。$\mathcal{K}'$上採用弱拓樸(weak topology)並以$(\cdot,\cdot)$表$\mathcal{K}'-\mathcal{K}$對偶序對。

2.1 定理[4]

$\mathcal{K}'$上存在唯一機率測度其特徵函數(*characterization function*) $\mathcal{C}_X(\eta)$滿足下式：

$$\mathcal{C}_X(\eta)=\exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(\eta(t))dt\right),\eta\in\mathcal{K}. \quad (2.10)$$

定理 2.1 回答了第一個問題。Λ是存在的，只不過 supp(Λ)$\subset\mathcal{K}'$罷了。

令Θ爲$L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$之中滿足以下條件的函數$\phi$的集合：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_X(r\phi(s))|ds<+\infty \quad \text{for all } r\in\mathbb{R}. \quad (2.11)$$

2.2 定理[4]

令$\phi\in\Theta$。則吾人可選得一函數列$\{\phi_n\}\subset\mathcal{K}$使得

(i) 在$\{\phi_n\}$在$L^1\cap L^2(\mathbb{R},dt)$中收斂至$\phi$；

(ii) 函數列$\{(\cdot,\phi_n)\}$在$(\mathbb{M}_X,\rho)$中收斂至某隨機變數Y且使得其特徵函數滿足

$$\Phi_Y(r)=\exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(r\phi(s))ds\right) \quad r\in\mathbb{R}.$$

定義

$$\langle\cdot,\phi\rangle=Y=\rho-\lim_{n\to\infty}(\cdot,\phi_n),$$

上式中ϕ與ϕ_n恰如定理 2.2 所示。

特別地，取$\phi=\mathbf{1}_{(s,t]}$，則$\Phi_{\langle\cdot,\phi\rangle}$恰是(1.1)。

因此，在沒有條件(1.3)，(1.5)支持下，Lévy 過程X仍可表爲$(\mathcal{K}',\mathcal{B}(\mathcal{K}'),\Lambda)$上之函數如下：

$$X(t;x)=\begin{cases}\langle x,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle, & \text{若 } t\ge 0\\ -\langle x,\mathbf{1}_{[t,0]}\rangle, & \text{if若 } t>0,\ x\in\mathcal{K}'.\end{cases}$$

上述結論回答了第三個問題，與[2]情況不同的是，$X(t)$不一定是可積隨機過程，例如 Stable 過程$(0<\alpha<1)$便是不可積的隨機過程。

以上討論中Θ扮演一個重要的腳色。以下引理更顯示Θ的重要性。

令$\phi\in\Theta$。則$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(r\phi(s))ds$爲$\mathbb{R}$上的連續函數，且吾人有

$$\log\Phi_{\langle\cdot,\phi\rangle}(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(r\phi(s))ds. \quad (2.12)$$

若吾人視 X 等同於等同於其 rcll (right continuous with left limits)修正（見[6], Theorem 11.5, p. 63）且以$\mathcal{E}$表以下形式隨機變數的集合：

$$\sum_{j=1}^{m}a_j(X(d_j)-X(c_j)).$$

$$\sum_{j=1}^{m}a_j(X(d_j)-X(c_j))=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sum_{j=1}^{m}a_j\,\mathbf{1}_{(c_j,d_j]})dX(t;x),$$

$x\in\mathcal{K}'$,

上式中對任一正整數$j=1,2,\ldots,m$，取$c_{m+1}=+\infty$，$a_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$與$c_j<d_j<c_{j+1}$。

2.3 定理[4]

(i) 令 $cl(\mathcal{E})$表$\mathcal{E}$在$(\mathbb{M}_X,\rho)$裡的閉包(closure)且$Y\in cl(\mathcal{E})$。則 Y 具有無限可分分佈(infinitely divisible distribution)。

(ii) 給予$\phi\in\Theta$定義$\tilde{\phi}(x)=\langle x,\phi\rangle$ $x\in\mathcal{K}'$。則$\tilde{\phi}\in cl(\mathcal{E})$。$\tilde{\phi}(x)$即是 Lévy 隨機積分，吾人寫作

$$\tilde{\phi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)dX(t;x),\ \ x\in\mathcal{K}'.$$

三、Lévy 機率測度的支撐集

K. Itô [1]曾證明給予任一定義於$\mathcal{K}$上之連續正定函數$\Phi(\eta),(\eta\in\mathcal{K})$，吾人皆可建構一機率空間$(\Omega, P)$,及一$\mathcal{K}'$-値線性隨機變數，$Z$ 定義於Ω上，使得

$$\Phi(\eta)=\int_{\Omega}e^{iZ(\omega)(\eta)}P(d\omega)\Lambda$$

此外，存在某個可數 Hilbert 空間(coubtably Hilbert space)$\mathcal{E}$使得$\mathcal{K}$緊緻於$\mathcal{E}$的對偶$\mathcal{E}'$中且 supp(Z) $\subset$ $\mathcal{E}'$)。受到 Itô 定理的鼓舞，吾人得到 Lévy 機率測度的支撐集與 Lévy 泛函的關係。吾人特別想知道在何條件下 Lévy 測度的支撐集會包含於$\mathcal{S}'$之中。答案如下：

3.1 定理[4]

視複數値函數

$$f_X(\eta)-\int_{-\infty}^{\infty}f_X(\eta(s))ds\ (\eta\in\mathcal{K})$$

爲定義於$\mathcal{S}$之原點鄰近的函數。則 $Supp(\Lambda)$包含於$\mathcal{S}'$裡之充要條件是 $f_X(\eta)$ 在$\mathcal{S}$之原點（對於$\mathcal{S}$的拓樸）連續。

以下之系簡化定理 2.3 的條件，至少在驗證時較簡單。

3.2 系

令

$$g_X(t)=\int_{|u|>1}(e^{iut}-1)\,d\beta_0(u),\ t\in\mathbb{R}$$

並視複數値函數$G_X(\eta)$，

$$G_X(\eta)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}g_X(\eta(t))\,dt,\eta\in\mathcal{K}$$

爲定義於$\mathcal{S}$之原點鄰近的函數。則$\Lambda(\mathcal{S}')=1$之充要條件爲G_X 在$\mathcal{S}$之原點（對於$\mathcal{S}$的拓樸）連續。

吾人不難證明當$\phi\in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$時條件(2.11)等價予以下條件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g_X(r\phi(s))|\,ds<+\infty,\ r\in\mathbb{R}.\qquad(3.1)$$

顯然$\mathcal{K}\subset\Theta$。更進一步推論，吾人有以下更一般的的結論。

3.3 系

若 *Lévy* 函數f_X在原點是局部 *Lip-1*（也就是說，存在δ，$M>0$使得當$|t|\leq\delta$時，$|f_X(t)|\leq M|t|$），則(i) $\Theta=L^1\cap L^2(\mathbb{R})$且(ii) $\Lambda(\mathcal{S}')=1$。

3.4 系

若β具有一階絕對動差，則(i) $\Theta=L^1\cap L^2(\mathbb{R})$且(ii) $\Lambda(\mathcal{S}')=1$。

四、舉例

例一

所有相對於布朗運動、Poisson 過程、Gamma 過程、Pascal 過程等 Meixner 過程的特徵函數中的β測度皆存在$m>0$使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{m|u|}\,d\beta(u)<+\infty$$

故對應的機率測度Λ是解析的([3], Theorem 2.7)。因此依據系 3.3，吾人有$\Theta=L^1\cap L^2(\mathbb{R})$且$\Lambda(\mathcal{S}')=1$。

例二

設$0<\alpha\leq 2$，X 爲α-穩定過程，其對應之 Lévy 測度β_0定義如下：

$$d\beta_0(u)=c_1\cdot|u|^{-1-\alpha}\,\mathbf{1}_{(-\infty,0)}du+c_2\cdot u^{-1-\alpha}\cdot\mathbf{1}_{(0,+\infty)}du$$

上式中$c_1,c_2\geq 0$，$c_1+c_2>0$。當$1<\alpha\leq 2$時，因其測度β具有一階絕對動差，應用系 3.3 可知$\Theta=L^1\cap L^2(\mathbb{R})$且$\Lambda(\mathcal{S}')=1$。

當$0<\alpha\leq 1$時，則$\Lambda(\mathcal{S}')=1$。此外(a)若$0<\alpha<1$則$\Theta=L^2\cap L^\alpha(\mathbb{R})$；(b)若$\alpha=1$且$\beta$對稱時：$\Theta=L^1\cap L^2(\mathbb{R})$；(c)若$\alpha=1$而$\beta$不對稱時：

$$\Theta=\left\{\phi\in L^1\cap L^2(R):\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(s)||\,ds<+\infty\right\}.$$

五、結論

- 定理 2.1 肯定的回答了第一個問題。也就是說，縱然沒有(1.3)，(1.5)假設的支持，Lévy 機率測度Λ依然會在$\mathcal{K}'$上存在。
- 定理 3.1 刻劃了Λ的可測支撐集(measurable support)會包含於$\mathcal{S}'$裡的條件。
- Lévy 過程$X(t)$仍可表爲$(\mathcal{K}',\mathcal{B}(\mathcal{K}'),\Lambda)$上之函數如下：

$$X(t;x)=\begin{cases}\langle x,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle, & \text{若 } t\geq 0\\ -\langle x,\mathbf{1}_{[t,0]}\rangle, & \text{if若 } t>0,\ x\in\mathcal{K}'.\end{cases}$$

- 沿用[2]的結論 Shih [8]證明 S-變換仍可用定理 1.1 表示。

參考文獻

[1] K. Itô, *Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, CBMS-NSF Regional Conf. Series in Applied Math., Vol. 47, SIAM, Philadelphia, (1984).

[2] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, *J. Funct. Anal.*, **168**, 46 (1999).

[3] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, *J. Funct. Anal.*, **211**,

1 (2004).

[4] Y.-J. Lee and H.-H. Shih, *J. Funct. Anal.*, **237**, 617 (2006).

[5] E. Lytvynov, *J. Funct. Anal.*, **200**, 118 (2003).

[6] K. Sato, *L´evy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[7] W. Schoutens, *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Lecture Notes in Statistic 146, Springer (1999).

[8] H.-H. Shih, The Segal-Bargmann transform for non-integrable Lévy processes, in preparation.