[研究成果報導]

從圖著色到圖的完全可定向性

中央研究院數學研究所 李國偉

某次在國外參加研討會，有位研究圖論（graph theory）的同行逗笑說：「學生跟我說，以前給圖形塗的顏色叫做紅色、黃色、綠色、藍色……，但是上了你的課才知道顏色應該叫做1、2、3、4……。」其實圖論專家把普通的顏色換成數字後，便把著色問題轉化成標號問題，從而因為數字本身的內涵，而大大拓展了可能的研究空間。

眾所周知圖論著色的研究，肇始於 19 世紀有關地圖是否能用四種顏色區分相鄰國家的「四色問題」。用圖論的術語來講，就是問平面圖的著色數是否不超過 4？這個看似益智遊戲的問題，其實反映了圖論的核心領域。用有限個點與線連起來的圖，可以模擬非常廣泛的關係結構。譬如，當兩點間有線相連時，可用來表示兩點在使用資源上有矛盾關係。古典的圖著色(coloring)問題就是要把點都塗上顏色，但是相鄰點必須塗以相異的顏色。如此一來顏色相同的點之間，就不會發生使用資源的衝突。所謂圖 G 的著色數(chromatic number) $\chi(G)$，就是能達成這種目的所需的最少顏色數目。

如果把顏色換成正整數，著色就等於把點加以標號(labeling)，使得相鄰點標以相異號碼。顏色換成數目以後，就引出一個有趣的現象。因為每條邊有兩個端點，所以可以從標號小的一端畫一個箭頭到標號大的一端，如此便把原來的圖變成一個賦予定向(orientation)的有定向圖(oriented graph)。這種定向有一個特色，就是順著箭頭走都是由標號小的點到標號大的點，所以一定不會走回原來出發點。也就是說這種定向是所謂無圈(acyclic)定向。

如果 D 是圖 G 的無圈定向，而 C 是 G 的一條普通的回路，那麼按照固定方向走 C 一圈，D 所畫的箭頭有些會是順向，而有些則是逆向。因為 D 是無圈定向，所以順向箭頭的數目 c^+與逆向箭頭的數目 c^-都不為 0。我們取兩個比值 c^+/c^-與 c^-/c^+中較大的一個定為 C 的流比(flow-ratio)，記做$\theta(C;\ D)$。無圈定向 D 的流比$\theta(D)$則定義為 $\max\{\theta(C;\ D) \mid C$ 是 G 的回路$\}$；當 G 沒有回路時，約定 D 的流比為 1。

Minty [3]在 1962 發現一個有趣的結果，就是

$$\chi(G) = 1 + \min\{\lceil\theta(D)\rceil \mid D \text{ 是 } G \text{ 的無圈定向}\},$$

其中符號$\lceil\theta(D)\rceil$代表不小於$\theta(D)$的最小整數。而當我們把$\theta(D)$穿的外套丟掉後，Goddyn et al. [8]在 1998 證明

$$\chi_c(G) = 1 + \min\{\theta(D) \mid D \text{ 是 } G \text{ 的無圈定向}\},$$

其中$\chi_c(G)$是圖 G 的圓著色數(circular chromatic number)。圓著色數是普通著色數的精緻化，也只有把顏色用數目取代後，才會自然引出的現象。圓著色數是近 10 年來國際圖論研究的核心問題之一，中山大學朱緒鼎教授正是此領域的權威，閱讀他的兩篇綜論文章[11,12]可鳥瞰全局狀況。

多年來我的研究工作著重於圖的著色問題，曾經在均勻著色(equitable coloring)、列表著色(list coloring)、平方圖的著色等類問題上發表過論文。上述 Minty 以及 Goddyn et al.的結果，使我注意到定向與著色的密切關係。其中特別讓我感覺好奇的是，在無圈定向裡各個回路上順向與逆向邊的分配狀況。一個極端的情形是回路上恰有一條逆向邊，因此這條邊一旦倒轉方向，就會產生有向回路，從而破壞了原來的無圈性。這種轉向後會產生有向回路的邊稱為相依邊(dependent arc)，我們從著色導引到定向的研究，就從瞭解相依邊的性質開始。

令 D 是圖 G 的無圈定向，D 的相依邊數記做 d(D)，又令 $d_{min}(G)$或 $d_{max}(G)$表示當 D 窮盡 G

的所有無圈定向時，d(D)的最小值或最大值。其中 $d_{max}(G)$是容易決定的參數，它恰好等於 G 的邊數減去點數再加上 G 的連通塊數目。可是 $d_{min}(G)$卻是一個非常耐人尋味的量，也反映了圖本身某些深層的性質，更與其他組合數學的研究有出人意表的關連。譬如 $d_{min}(G) = 0$ 剛好刻畫了所有 Hasse diagram 的底圖。所謂 Hasse diagram 就是對於給定的偏序集合，畫出元素之間覆蓋關係的圖式法。我們稱 Hasse diagram 的底圖為覆蓋圖（cover graph），Lih et al. [6]判定某些重要圖類不是覆蓋圖，並且可以應用這類結果計算出一些圓著色數。

在 Lai & Lih [5]裡，我們找出一串由小到大的參數，全部都是 $d_{min}(G)$的下限。更仔細的說，定義一個新的圖 G^T，它的點就是 G 的三角形，兩個點相鄰的充要條件是對應的三角形有共用邊。我們用$\alpha(G^T)$與$\theta(G^T)$分別表示 G^T 的獨立數與點團覆蓋數。再定義$\pi_T(G)$為從 G 裡拿掉最少的邊數，使得不再有三角形。以及定義$\pi_E(G)$為從 G 裡拿掉最少的邊數，使得剩下的圖是一個覆蓋圖。我們得到的基本不等式序列為

$$\alpha(G^T) \le \theta(G^T) \le \pi_T(G) \le \pi_E(G) \le d_{min}(G)。$$

有例子顯示這些圖的參數確實是相異的參數，而當它們等於 $d_{min}(G)$時，便給出 $d_{min}(G)$不同形式的解釋。除了 $d_{min}(G)$，其他參數也曾在與目前場景相異的問題裡被探討過。譬如由 Tuza [9]提出的一個有名的待解難題，便斷言$\pi_T(G) \le 2\alpha(G^T)$。

假如下述現象發生時，我們就稱圖 G 是完全可定向的（fully orientable）：對於任何整數 d，$d_{min}(G) \le d \le d_{max}(G)$，都可找到 G 的無圈定向 D，使得 d(D) = d。完全可定向性的研究肇始於 West [10]以及 Fisher et al. [2]，之後就沒有比較深入的進展，他們當時甚至不知道是否存在不具有完全可定向性的圖。在 Chang et al. [1]裡，首先發現了一類特殊的圖，它們沒有完全可定向性。同篇論文中，也證明了好些完全多部圖是完全可定向的。

在尋找更多具有完全可定向性的圖類方面，Lih et al. [6]證明了外平面圖(outerplanar graph)是完全可定向的。所謂外平面圖是可以畫在普通平面上，而使得所有的點都接觸到無窮面的圖。此外，外平面圖 G 的 $d_{min}(G)$也可以用某些適當的參數明確寫出來。對於給定的正整數 k 而言，如果圖 G 的每個子圖 H 裡都至少有一點，它在 H 裡的度數不超過 k，則稱 G 是 k 退化圖。Lai et al. [4]證明了 2 退化圖都是完全可定向性的，並且前述那些 $d_{min}(G)$的下限都等於 $d_{min}(G)$。因為外平面圖都是 2 退化圖，這個結果推廣了外平面圖的完全可定向性。

在處理 2 退化圖時，最重要的技巧是在完全可定向圖上，適當加入新的路徑，而仍然能保持完全可定向性。把已知完全可定向圖加以擴充，卻同時保持住完全可定向性，是我們目前關注的主要問題之一。在擴充的過程中，如果不小心，即使加入一條新的邊，也有可能破壞掉完全可定向性。

Lai & Lih [5]研究了某些加邊、加路徑、加回路的操作，它們同時能保持完全可定向性。也研究了在這些操作下，各種 $d_{min}(G)$下限參數的數值變化範圍。雖然這幾類操作中，還有少數特例是否保持完全可定向性，狀況仍未明朗，但是在能保持完全可定向性的範圍內，已經產生好些有意思的應用。譬如，Halin 圖的細分可證明是完全可定向的，而當它不等於 4 個點上的完全圖時，$d_{min}(G)$的下限諸參數均相等。這裡所謂的 Halin 圖是先在平面上畫一個樹圖，但是要求每點的度數不為 2，再用一條回路連結樹圖所有的葉子點。而所謂細分就是把每條邊換成一條路徑。另外也可以證明，當圖不等於 4 個點上的完全圖，並且最大度數不超過 3 時，它不僅是完全可定向圖，也讓所有參數相等。

總之，近年我與林承穎、賴欣豪、董立大、張鎮華的合作過程中，發現圖的完全可定向性隱藏了不少與其他領域相牽連的關係，絕對不是一個孤立的偶發現象。我們目前挖掘出好幾個有趣的待解問題，提供了值得我們花費心力的挑戰。

參考文獻

[1] Gerard J. Chang, Chen-Ying Lin and Li-Da Tong, *NCTS/TPE-Math Technical Report*, 2006-013 (2006).

[2] D. C. Fisher, K. Fraughnaugh, L. Langley and D. B. West, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **71**, 73 (1997).

[3] L. A. Goddyn, M. Tarsi and C. Q. Zhang, *Journal of Graph Theory*, **28**, 155 (1998).

[4] Hsin-Hao Lai, Gerard J. Chang and Ko-Wei Lih, *Information Processing Letters*, **105**, 177 (2008).

[5] Hsin-Hao Lai and Ko-Wei Lih, to appear in *European Journal of Combinatorics*.

[6] Ko-Wei Lih, Chen-Ying Lin and Li-Da Tong, *Discrete Applied Mathematics*, **154**, 166 (2006).

[7] Ko-Wei Lih, Chen-Ying Lin and Li-Da Tong, to appear in *Discrete Mathematics*.

[8] G. S. Minty, *American Mathematical Monthly*, **69**, 623 (1962).

[9] Z. Tuza, *Graphs and Combinatorics*, **6**, 373 (1990).

[10] D. B. West, *Discrete Mathematics*, **138**, 393 (1995).

[11] X. Zhu, *Discrete Mathematics*, **229**, 371 (2001).

[12] X. Zhu, In: *Topics in Discrete Mathematics*, pp. 497-550. Springer, Berlin (2006).