偏微分方程的奇異極限問題

交通大學應用數學系　林琦焜

一、引言

在研究大自然的現象，我們就會遇到偏微分方程，沒有微分方程，人們實在很難深刻地理解大自然運作的機制。從數學的角度而言，偏微分方程的研究除了存在性、唯一性、正則性、奇異性之外，則是奇異極限的問題。例如：

1. 不可壓縮極限(incompressible limit)
2. 無黏性極限(zero viscosity limit)
3. 零色散極限(zero dispersion limit)
4. 半古典極限(semi-classical limit)
5. 非相對論極限(non-relativistic limit)
6. 流體極限(hydrodynamic limit)

這些問題主要探討不同方程及其不同物理性質之間的關係，其中整個中心點是 Euler 或 Navier-Stokes 方程，這也說明這兩個方程的根本重要性，這些問題對於數學分析之挑戰，也成爲數學發展的重要泉源。

二、量綱分析與漸進開展式

任何一個奇異極問題之來源必有其本身的目的與物理意義，絕對不可能在方程式中任意加一個小或大參數，倘若如此，則極可能問錯了問題，所以要眞正了解這類的問題，第一步就是量綱分析(dimensional analysis)，對原方程式的物理或幾何意義有明確之掌握，並且聽原方程式的聲音，問他們所關心的問題。對原方程式作無量綱分析後，則特定的參數就自然而然出現，因此可針對這個參數討論奇異極限問題。並由此決定哪些是重要的量。除此之外，我們可以透過這個重要的參數（不具量綱）做漸進展開式，猜測第一項或第 n 項近似，雖然這兩個方法是重要的研究技巧，但台灣數學界對此普遍缺少認識，這是應用數學教育必須加強之處。

三、半古典極限

目前台灣正掀起一股研究非線性 Schrödinger 方程（或相近的 Ginzburg-Landau 方程）的熱潮，理論或計算都有，而且成果相當豐碩。1927 年 Madelung 透過變數變換 $\psi = Ae^{iS/\hbar}$ 可將 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V'(|\psi|^2)\psi = 0 \tag{1}$$

轉換成類似古典力學的量子 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + V' = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A} \tag{2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2m}A\Delta S + \frac{1}{m}\nabla A\cdot\nabla S = 0 \tag{3}$$

或令

$$\rho = A^2 = |\psi|^2,\ u = \frac{\nabla S}{m} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\nabla\psi}{\psi} - \frac{\nabla\psi^*}{\psi^*}\right) \tag{4}$$

(2)(3)可以改寫爲流體力學的可壓縮 Euler 方程（多了三次微分項稱爲色散項）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u + \frac{1}{m}V''(\rho)\nabla\rho = \frac{\hbar^2}{2m^2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{6}$$

從最後這個形式(5) (6)令 $\hbar\to 0$，所得的極限方程式正是可壓縮 Euler 方程，但是如何藉由嚴格的數學分析證明這個事實，是一件極具挑戰性的問題。目前主要的方法有三個

1. Quasilinear hyperbolic system

   這個方法對非線性 Schrödinger 方程仍能處理，因爲利用 quasilinear hyperbolic system 理論，所以僅能處理有限時間[6,9]。將 Schrödinger 方程轉換爲 quasilinear hyperbolic system，主要有 Schochet-Weinstein 於 1986 年研究 Zakharov 方程之 Schrödinger 極限，隱含

在其中的思想[14]，而後 Grenier 於 1998 年正式引進 modified Madelung 變換之概念[6]，之後這便成爲 Schrödingher 方程之半古典極限的基本方法，對於具有非線性導數的 Schrödinger 方程，這個方法仍然可以處理[3-5,7,9]。

2. Wigner transform

第二個方法則是透過 Wigner 變換時將 Schrödinger 方程(1)化爲 Vlasov 方程[1,5,8]，再利用 Blotzmann 方程 moments 的概念轉化爲 Euler 方程，但是目前爲止僅能處理線性 Schrödinger 方程。由於是線性方程，所以可以討論長時間的行爲，這方面的工作以維也納與巴黎兩地爲代表。

3. Modulation energy

第三個方法是法國數學家 Y. Brenier [1]在處理 Vlasov-Poisson 方程的 quasineutron limit 時引進，主要概念是先猜出極限方程，而後考慮兩者相減之後的能量（也因此稱爲 modulation energy），最後針對 modulation energy 做估計。如果討論的是不可壓縮極限，我們也可以將高速震盪的聲波考慮進來[8,13]，此時仿流體力學之不可壓縮極限之概念，必須引進所謂 wavegroup，不直接研究聲波本身，而透過類似於常微分方程之積分因子與聲波之乘積，則新的函數對時間之微分是有界，再利用波動方程具有等距性(isometry)，原聲波與新的函數有相同之極限，如此就避開原來的困難，目前這是研究不可壓縮極限最有效的方法。

四、Klein-Gordon 與 Dirac 方程

如果把光速 c 也考慮進來，則 Schrödinger 方程就被 Klein-Gordon 或 Dirac 方程所取代，形式上若令 $c \to \infty$，則 Klein-Gordon (Dirac)方程收斂到 Schrödinger 方程，我們稱之爲非相對論極限(non-relativistic limit)，目前以法國巴黎還有日本北海道大學的爲代表[11]，其中最重要的方法是利用 Strichartz 估計，同時考慮時間與空間進而得到收斂性，對於 Klein-Gordon 方程我們仍能仿 Schrödinger 方程討論半古典極限，但到目前爲止可知的成果仍是寥寥可數。從 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \frac{mc^2}{2}\Psi + V'(|\Psi|^2)\Psi = 0 \tag{7}$$

出發，考慮變數變換

$$\psi = \Psi e^{\frac{imc^2 t}{\hbar}} \tag{8}$$

則 ψ 滿足 modulated Klein-Gordon 方程

$$-\frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V'(|\psi|^2)\psi = 0 \tag{9}$$

令 $c \to \infty$，這個方程式就成爲 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V'(|\psi|^2)\psi = 0 \tag{10}$$

但是要研究半古典極限，並無法直接由 Klein-Gordon 方程而得，我們可以引進時空之梯度

$$\tilde{\nabla} = (\nabla, \frac{i}{c}\partial_t) \tag{11}$$

則由 WKB 分析，令

$$\psi = Ae^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad \rho = |\psi|^2, \quad \tilde{u} = \frac{1}{m}\tilde{\nabla}S \tag{12}$$

可將 Klein-Gordon 方程(9)轉換爲在 Minkowski 空間的可壓縮 Euler 方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(\rho\tilde{u}) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u} + \frac{1}{m}V''(\rho)\tilde{\nabla}\rho = \frac{\hbar^2}{2m^2}\tilde{\nabla}\cdot\left(\frac{\tilde{\nabla}^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{14}$$

令 $\hbar \to 0$，則半古典極限應該是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(\rho\tilde{u}) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u} + \frac{1}{m}V''(\rho)\tilde{\nabla}\rho = 0 \tag{16}$$

這是目前偏微分方程研究的主題之一也是筆者與博士班學生吳恭儉先生正著手努力以赴的研究[10]。

五、結論

奇異極限是一個有趣且富生命力的問題，對

於不同方程、不同領域之間的關係，例如古典力學、統計力學、流體力學、電漿物理……之間的關係如何，還有聯繫兩者之橋樑是什麼，從數學分析的角度能否提出一個合理且數學上的嚴格證明，這無論是對於問題本質了解，或理論與數值[3]計算之挑戰與提升都提供了適當且源源不絕的研究動機與想法。

參考文獻

[1] Y. Brenier, *Comm. Partial Differential Equations*, 737 (2000).

[2] D. Bresch, B. Desjardins, E. Grenier and C.-K. Lin, *Studies in Applied Mathematics*, 125 (2002).

[3] Q. Chang, Y. S. Wong and C. K. Lin, To appear in *Journal of Computational Physics* (2008).

[4] B. Desjardins, C. K. Lin and T. C. Tso, *Math. Models Methods Appl. Sci*., **10**, 261 (2000).

[5] I. Gasser, C. K. Lin and P. Markowich, *Taiwanese J. of Mathematics*., **4**, 501 (2000).

[6] E. Grenier, *Proc. Amer. Math. Soc*., **126**, 523 (1998).

[7] J. H. Lee and C. K. Lin, *Chaos, Soltons & Fractals*, **13**, 1475 (2002).

[8] H. L. Li and C. K. Lin, *Commum. Math. Phys*., **256**, 195 (2005).

[9] C. K. Lin and Y. S. Wong, *Journal of Differential Equations*, **228**, 87 (2006).

[10] C. K. Lin and K. C. Wu, Singular limits of the Klein-Gordon equation, in preparation, (2008).

[11] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Math. Annalen*, **322**, 603 (2002).

[12] A. Majda, *Appl. Math. Sci.*, **53**, Springer-Verlag, (1984).

[13] S. Schochet, *Journal of Diff. Equa*., **114**, 476 (1994).

[14] S. Schochet and M. Weinstein, *Commun. Math. Phys*., **106**, 569 (1986).