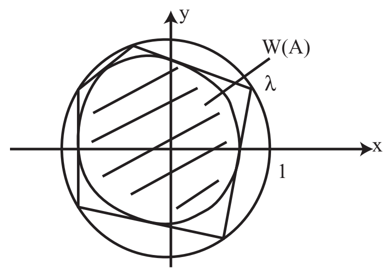
矩陣數值域與投影幾何

交通大學應用數學系　吳培元

設 A 是一個 n 階的複數矩陣，其數值域 $W(A)$ 定義為全體 $<Ax, x>$ 的集合，其中 $<\cdot, \cdot>$ 表示複數 n 維空間 $\mathbb{C}^n$ 的內積，而 x 則為 $\mathbb{C}^n$ 中任一單位向量。矩陣數值域的研究源起於 1918–1919 年 O. Toeplitz 和 F. Hausdorff 的兩篇論文[12, 9]。前者證明了數值域外圍的邊界是一條凸曲線，但沒有排除掉內部會有洞的可能。後者則證明了這是不可能的，即數值域一定是平面上的凸集合。這個性質是數值域研究在這九十年來發展的一個主軸。早期這方面的研究著重在其基本性質的建立。發展到中期，則有數值域各種不同形式的推廣，不僅可以考慮在無窮維希伯特空間上的線性有界算子的數值域，且可以擴及到更一般賦範代數元素的數值域而探討數值域與代數性質的交互影響。近二十年來，一方面對古典數值域和矩陣或算子的關係有了更透徹的了解，不少意想不到的關聯也被陸續發現，另一方面數值域和其他領域也有了新的聯結。最近兩、三年來，由量子計算的需求而定義了一類高階數值域，其研究正在如火如荼地進行。可以說這一領域不論在理論或應用層次上，都有無限的發展可能。

一、S_n-矩陣

我是在十年前開始涉足此領域，指導博士生高華隆從事這一方面的研究。他現是中央大學數學系副教授，我們仍保持常年合作研究的關係。當時發現的最有趣的現象係一個數值域與十八、十九世紀古典投影幾何的聯結。在 1822 年，法國幾何學家 J.-V. Poncelet 在他出版的一本專書[10]中有一個這樣的定理：設 C 和 D 是平面上的兩個橢圓且 C 包含於 D 中。如果存在一個 n 邊形其 n 個頂點都在 D 上且 n 邊都和 C 相切，則對任何 D 上的點 λ 都可找到一個 n 邊形以 λ 為其一頂點且具有上述頂點與邊的性質（我們稱此為 n-Poncelet 性質）。此一有趣的結果在過去一百八十年間歷經諸多著名數學家的研究而有各種不同形式的推廣與解釋。但基本上都仍圍繞在兩個二次曲線上打轉。我們發現，如果 D 正規化作平面上的單位圓，C 用一類 S_n-矩陣數值域的邊界代替，則他們之間也有類似的 $(n + 1)$-Poncelet 性質，即對單位圓上任一點 λ，都有一個唯一的 $n + 1$ 邊形，其所有頂點都在單位圓上，所有邊都和此矩陣數值域的邊界相切（見[1]）。這一結果將 Poncelet 性質由二次曲線推廣到高次曲線上。一個 n 階矩陣 A 屬於 S_n 類如果其矩陣範數不超過 1，其特徵值的絕對值都小於 1，且 $I_n - A^*A$ 的秩等於 1。n 階 Jordan 區塊 $J_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$，其中 $a_{ij} = 1$ 如果 $j = i + 1$，而其餘的 a_{ij} 皆為 0，就是這一類矩陣的例子。其數值域 $W(J_n) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \le \cos(\pi/(n + 1))\}$ 就具有上述 Poncelet 性質。S_n-矩陣（及其無窮維的推廣）的研究在 1960 年代就已開始，最早提出者是 D. Sarason [11]。如同 Jordan 區塊一樣，它可作為某些無窮維空間上的算子的 Jordan 形式的基本建構成份。其一般性質在過去幾十年間已被徹底地探討，但其數值域的性質則是首次被發現。



另兩個古典定理也可以分別由二次曲線推廣到 S_n-矩陣數值域邊界的是 Brianchon-Ceva 定理(1806 年，1678 年)和 Lucas-Siebeck 定理(1864 年)。前者說：設 ΔABC 是平面上的一個三角形，則三邊 AB，BC 和 CA 上的點 X，Y 和 Z 是某一個內切橢圓的切點的充份必要條件是 $\overline{AX} \cdot \overline{BY} \cdot \overline{CZ} = \overline{XB} \cdot \overline{YC} \cdot \overline{ZA}$。（Brianchon 定理說前者和 AY，BZ 和 CX 三線共點等價而 Ceva 定理說共點的條件和後者等價。）後者則是給出了一個內切橢圓的焦點的充份條件：設 A，B 和 C 是一個三次多項式 $p(z)$ 的零點，則其導函數 $p'(z)$ 的

兩個零點是內切於三角形ΔABC三邊的中點的橢圓的兩個焦點。對於前者，我們證明了如下的定理：設 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 是單位圓上相異的 $n+1$ 個點依序排列，則 $n+1$ 個邊 $a_1a_2,\ a_2a_3,\ \ldots,\ a_na_{n+1}$, $a_{n+1}a_1$ 上的點 $b_1, \ldots, b_{n+1}$ 是一個（唯一的）S_n-矩陣數值域邊界與多邊形 $a_1 \ldots a_{n+1}$ 的 $n+1$ 個邊相切的切點的充份必要條件係 $\prod_{j=1}^{n+1}|b_j - a_j| = \prod_{j=1}^{n+1}|b_j - a_{j+1}|$ $(a_{n+2} = a_1)$ (見[1])。當 $n = 2$ 時，這正是古典 Brianchon-Ceva 定理給的條件。對於後者，我們得到一組 S_n-矩陣特徵值滿足的充要條件使得其數值域的邊界與多邊形的各邊相切：設 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 是單位圓上 $n+1$ 個相異點且 $b_1, \ldots, b_n$ 係單位圓內 n 個點，則存在一 S_n-矩陣使得其特徵值是這些 b_j 且其數值域的邊界和 $n+1$ 多邊形 $a_1 \ \ldots \ a_{n+1}$ 的各邊相切的充份必要條件係這些 b_j 滿足 $\alpha_k = \beta_k + \alpha_{n+1}\overline{\beta}_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$，其中α_k和β_k分別是 a_j 和 b_j 的第 k 個基本對稱函數(見[2])。如果一高次多項式 $p(z)$的零點都在單位圓上，則此零點和導函數 $p'(z)$的零點都會符合這些條件，因而形成了多邊形的頂點和其內切曲線的焦點。

這些結果堪稱是跨世紀與跨領域的研究。有些不僅對單位圓上的多邊形成立，還可以推廣到平面上的更一般的多邊形（見[3，5]）。往另一個方向推進，則可以考慮對應的無窮維算子數值域的性質，這一方面目前還沒有太大進展。其相關的細節可以參考兩篇統覽性的論文[13，4]及其內所列舉的參考文獻。

二、伴隨矩陣

另一類和 S_n-矩陣相關的矩陣係多項式 $p(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ 的伴隨矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}。$$

這是一般矩陣的有理形式的基本建構成份。當 $a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$ 時，則 A 就是 Jordan 區塊。近年來我們對這一類矩陣的數值域也作了深入的探討。和 S_n-矩陣不同的是伴隨矩陣的數值域邊界上可能會有線段發生。我們的研究顯示，一個 n 階伴隨矩陣 A 的數值域邊界上最多有 n 條線段，且其有 n 條線段的充份必要條件是：（一）當 n 是奇數時，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a & & & 0 \end{bmatrix},$$

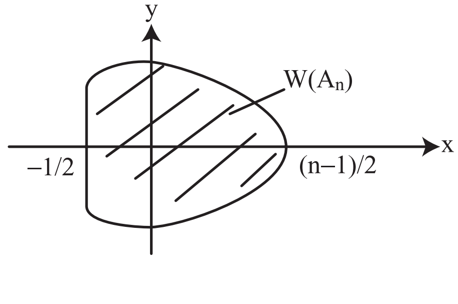
其中$|a| = 1$，（二）當 n 是偶數時，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ a & 0\cdots0 & b & 0\cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中$|a| = 1, |b| < 2\tan(\pi/n)$ 且 $\arg b = (\arg a \pm \pi)/2$（見[6]）。與此相對照的，用代數幾何中對偶的概念可以證明一般 n 階矩陣數值域上線段的個數最多是 $n(n-1)/2$。我們對於伴隨矩陣數值域的全盤了解還有很長的一段路要走。

三、冪零矩陣

一個 n 階矩陣 A 是冪零矩陣如果 $A^n = 0$。這也等價於 A 是酉等價於一個形如$[a_{ij}]_{i,j=1}^n$皆爲 0 的矩陣。當然 Jordan 區塊 J_n 就是這樣的一個例子。我們近期的研究發現冪零矩陣的數值域也有很多有趣的性質。例如很容易可以證明到平面上的原點 0 一定在一個非零的冪零矩陣 A 的數值域的內部。爲要探討 0 在其內部的量化位置，我們定義 $w(A)$和 $w_0(A)$分別是由 0 到 $W(A)$邊界的最大和最小距離。我們可以證明 $w(A) \le (n-1)w_0(A)$ 恆成立，而其等號成立的充份必要條件係 A 酉等價於其他二矩陣 aA_n 和 A'的直和，此處 a 係一滿足$|a| = 2w_0(A)$的純量而 A_n 係 n 階矩陣$[a_{ij}]_{i,j=1}^n$，當 $i < j$ 時 $a_{ij} = 1$ 而當 $i \ge j$ 時 $a_{ij} = 0$（見[8]）。故矩陣 A_n 在此扮演了一個關鍵性的角色。其數值域形如



有下列諸多性質：(一) $W(A_n)$ 對 x-軸上下對稱，(二)其邊界係一可微分曲線，(三)在直線 $x = -1/2$ 上，其邊界有一線段，(四) $w(A_n) = (n - 1)/2$ 且 $w_0(A_n) = 1/2$。

對於冪零矩陣，我們最想了解的問題係其數值域邊界上線段的個數。對此一問題，我們目前還沒有一個完整的解答。我們只能證明到如下的結果：設 A 是一 n 階冪零矩陣且 A 有一 $n-1$ 階子矩陣 B 其數值域係一圓心在原點的圓盤，則 $w(A)$邊界上線段的個數，當 $n = 3$，4 和 5 時，最多是 $n-2$，而當 $n \geq 6$ 時，最多是 $2(n-4)$（見[7]）。上述定理如果能去除掉 B 的條件，則應是這一方面的最佳結果了。

參考文獻

[1] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Multilinear Algebra*, **45**, 1 (1998).
[2] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Multilinear Algebra*, **45**, 4 (1999).
[3] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Multilinear Algebra*, **52**, 3 (2004).
[4] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Taiwanese J. Math*., **7**, 2 (2003).
[5] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Algebra Appl.*, 390 (2004).
[6] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Algebra Appl.*, **421**, 2 (2007).
[7] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Multilinear Algebra*, **56**, 1 (2008).
[8] H.-L. Gau and P. Y. Wu, *Linear Algebra Appl.*, **429**, 4 (2008).
[9] F. Hausdorff, *Math. Z.*, **3**, 1 (1919).
[10] J.-V. Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, Paris (1822).
[11] D. Sarason, *Trans. Amer. Math. Soc*., **127**, 2 (1967).
[12] O. Toeplitz, *Math. Z.*, **2**, 1 (1918).
[13] P. Y. Wu, *Amer. Math. Monthly*, **107**, 6 (2000).